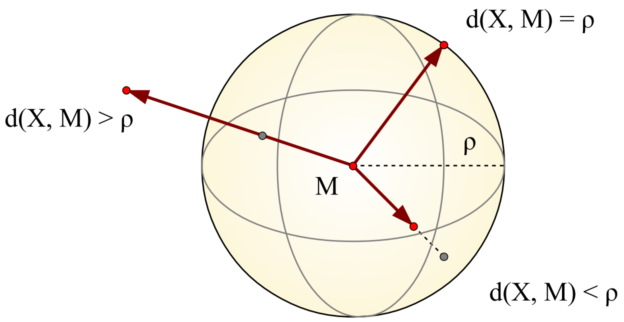
§24 Kugeln im Modellraum

Alle Objekte, die wir bislang im Modellraum untersuchten, waren gradliniger Natur. Keine Krümmung. Nirgendwo. Dennoch ist es auch im Modellraum ein Leichtes, gekrümmte Strukturen zu erzeugen. Als Hilfsmittel ist nur der Abstandsbegriff erforderlich, über den wir längst verfügen. Die schlichtesten Objekte, die wir mit seiner Hilfe erzeugen können sind Kugeln. Eine Kugel ist ja nichts anderes als die Menge aller Raumpunkte, die von einem gegebenen „Mittelpunkt“ einen fest vorgegebenen Abstand besitzen.



<u>(24.1) Definition</u>

Sei M ein Punkt des Modellraumes und $\rho \in \mathbb{R}^+$ eine positive reelle Zahl.

Dann heiße die Punktmenge $k(M,\rho) := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid d(X,M) = \rho\}$ *Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius ρ*.

Gilt für einen Punkt X des Modellraumes $d(X, M) < \rho$, so sagen wir: „Der Punkt X liegt *innerhalb der Kugel*.“

Gilt für einen Punkt X des Modellraumes $d(X, M) > \rho$, so sagen wir: „Der Punkt X liegt *außerhalb der Kugel*.“

Eigentlich wird in der Definition keine volle Kugel, sondern nur ihr „Rand“, ihre „Schale“ beschrieben. Für die Definition von „Vollkugeln“ müsste in der definierenden Abstandsgleichung die „kleiner-gleich“-Relation verwendet werden: $d(X, M) \le \rho$. Da wir aber „Kugeln“ im $\mathbb{R}^3$ als Analogon zu „Kreisen“ im $\mathbb{R}^2$ begreifen wollen, wählen wir die in der Definition (24.1) gewählte Sprechweise.

Mit Hilfe der Definition des Abstandes zweier Punkte (siehe Definition (14.1) und Definition (14.2)) gelangen wir unter Verwendung der folgenden Identitäten sofort zu einer vektoriellen Beschreibung einer Kugel.

$$d(X,M) = \|\overrightarrow{MX}\| \qquad \text{und} \qquad \|\overrightarrow{MX}\|^2 = \overrightarrow{MX}^2 = (\vec{X} - \vec{M})^2 .$$

<u>(24.2) Bemerkung und Vereinbarung</u>

Sei M ein Punkt des Modellraumes und $\rho \in \mathbb{R}^+$ eine nicht negative reelle Zahl.

Dann gilt $k(M,\rho) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{MX}^2 = \rho^2\}$ oder auch $k(M,\rho) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{X} - \vec{M})^2 = \rho^2\}$.

Zur Angabe der Gleichung der Kugel k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius ρ schreiben wir abkürzend:

$$k : (\vec{X} - \vec{M})^2 = \rho^2$$

Wir ersparen uns darzulegen, wie die vektorielle Kugelgleichung erfolgreich für Punktproben eingesetzt werden kann. In der ersten Übung zu diesem Paragraphen soll für Kugeln und Punkte des Modellraumes geprüft werden, ob letztere innerhalb, auf (dem Rand) oder außerhalb der Kugeln liegen.

Stattdessen wird im folgenden Beispiel nach gemeinsamen Punkten von einer Kugel und einer Geraden gesucht. Unserer Anschauung nach kann es genau zwei, genau einen oder keinen gemeinsamen Punkt geben. Das Beispiel wird eine analytische Ursache aufzeigen.

Sind Kugel und Gerade nicht disjunkt, so haben sie zwar in der Regel zwei, aber nicht mehr gemeinsame Punkte. Darin drückt sich aus, dass eine Kugel kein „gerades“ Objekt ist. Kugeln enthalten – anders als Ebenen – keine Geraden!

(24.3) Beispiel (Schnitt zwischen Kugel und Gerade)

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und die Kugel mit dem Mittelpunkt M = (–7; –4; –11) und dem Radius $\rho = \sqrt{725}$. Zu bestimmen sind die gemeinsamen Punkte von g und k.

Lösung:

$$X \in g \cap k \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}: \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} \right]^2 = \left(\sqrt{725}\right)^2$$

Nun gilt:

$$\left[\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right]^2 = 725 \quad \Leftrightarrow \quad 509 + 36\,\lambda + 36\,\lambda^2 = 725 \quad \Leftrightarrow \quad 36\,\lambda^2 + 36\,\lambda - 216 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \ \vee \ \lambda = -3$$

Es gibt zwei Punkte auf der Geraden g, die den gewünschten Abstand haben:

$$\vec{S}_1 := \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{S}_2 := \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -14 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Die Rechnung zeigt, dass die Untersuchung von gemeinsamen Punkten von Kugel und Gerade auf eine quadratische Gleichung für den Geradenparameter führt. Wir wissen, dass quadratische Gleichungen genau zwei, genau eine oder keine Lösung haben können. Damit findet unsere Anschauung eine analytische Entsprechung im Modellraum.

(24.4) Satz

Gegeben seien im Modellraum eine Kugel k(M, ρ) und eine Gerade $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\, \vec{u}$.
Dann haben die beiden Objekte genau zwei, genau einen oder keinen gemeinsamen Punkt.

Beweis:

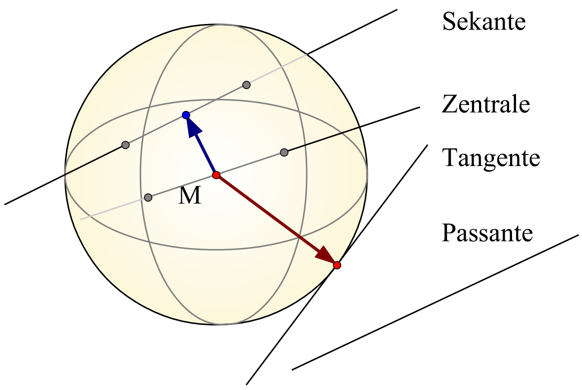
$$X \in g \cap k \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}: \left(\vec{A} + \lambda\,\vec{u} - \vec{M}\right)^2 = \rho^2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}: \left(\lambda\,\vec{u} + \overrightarrow{MA}\right)^2 = \rho^2$$

Es gilt:

$$\left(\lambda\,\vec{u} + \overrightarrow{MA}\right)^2 = \rho^2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}^{\,2}\lambda^2 + \left(2\,\overrightarrow{MA}\cdot\vec{u}\right)\lambda + \left(\overrightarrow{MA}^2 - \rho^2\right) = 0$$

In Abhängigkeit von der Diskriminante der quadratischen Gleichung besitzt diese genau zwei, genau eine oder keine Lösung. Das war zu zeigen.

Wir übertragen die aus der Euklidischen Geometrie geläufigen Begriffsbildungen in den Modellraum.



(24.5) Definition

Gegeben seien im Modellraum eine Kugel und eine Gerade.

Die Gerade heiße

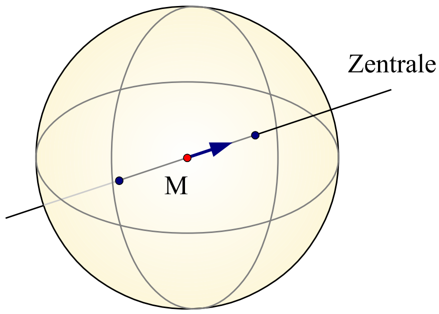
- *Sekante* der Kugel, wenn sie mit der Kugel genau zwei gemeinsame Punkte besitzt.
- *Tangente* der Kugel, wenn sie mit der Kugel genau einen gemeinsamen Punkt besitzt.
- *Passante* der Kugel, wenn sie mit der Kugel keinen gemeinsamen Punkt besitzt.
- *Zentrale* der Kugel, wenn sie durch den Mittelpunkt der Kugel verläuft.

Mit diesen Begriffsbildungen sind Anschauungen verbunden, die wir im Folgenden überprüfen werden. Wir beginnen mit einer Einordnung der Zentralen:

(24.6) Satz

Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ) und eine Gerade g.

Ist g eine Zentrale der Kugel, so ist g auch eine Sekante der Kugel.



Beweis:

Da g durch den Mittelpunkt M der Kugel verläuft, kann g unter Verwendung eines vom Nullvektor verschiedenen Richtungsvektors durch eine Gleichung der Form $\vec{X} = \vec{M} + \lambda\,\vec{u}$ beschrieben werden.

Wir untersuchen g und k(M, ρ) auf gemeinsame Punkte.

$$X \in g \cap k \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \left((\vec{M} + \lambda\,\vec{u}) - \vec{M} \right)^2 = \rho^2$$

Es folgt:

$$\left(\vec{M} + \lambda\,\vec{u} - \vec{M} \right)^2 = \rho^2 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda\,\vec{u})^2 = \rho^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2\,\vec{u}^2 = \rho^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 = \frac{\rho^2}{\vec{u}^2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\rho}{\|\vec{u}\|} \vee \lambda = -\frac{\rho}{\|\vec{u}\|}$$

Die Rechnung zeigt, dass eine Zentrale stets zwei verschiedene gemeinsame Punkte mit der Kugel hat und deshalb eine Sekante sein muss.

Wir untersuchen nun die Eigenschaften von Sekanten. Unserer Anschauung zufolge, sollte eine Sekante sowohl durch das Kugelinnere als auch durch das Kugeläußere verlaufen. Der folgende Satz präzisiert diese Vorstellung.

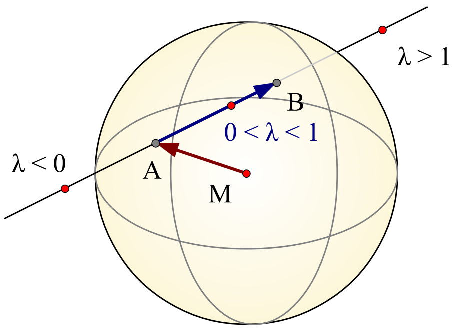
(24.7) Satz

Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ) und zwei verschiedene Punkte A und B, die auf der Kugel liegen.

Dann gilt:

(a) Ein Punkt X der Sekante AB liegt genau dann innerhalb der Kugel, wenn er auf der Strecke $\overline{AB}$ zwischen den beiden Endpunkten A und B liegt.

(b) Ein Punkt X der Sekante AB liegt genau dann außerhalb der Kugel, wenn er kein Punkt der Strecke $\overline{AB}$ ist.



Beweis der ersten Behauptung:

Die Sekante AB besitzt die Gleichung $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\, \overrightarrow{AB}$.

Für einen Punkt $X \in AB$ ergibt sich daher:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MX} &= -\vec{M} + \vec{X} = -\vec{M} + \vec{A} + \lambda(-\vec{A} + \vec{B})\\ &= -\vec{M} + (1-\lambda)\vec{A} + \lambda\vec{B} = -(1-\lambda+\lambda)\vec{M} + (1-\lambda)\vec{A} + \lambda\vec{B}\\ &= -(1-\lambda)\vec{M} + (1-\lambda)\vec{A} - \lambda\vec{M} + \lambda\vec{B} = (1-\lambda)\overrightarrow{MA} + \lambda\,\overrightarrow{MB}\end{aligned}$$

Da die Punkte A und B auf der Kugel liegen, gilt $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\| = \rho$.

Mit der Dreiecksungleichung (14.16)(3) folgt:

$$\|\overrightarrow{MX}\| \le \|(1-\lambda)\overrightarrow{MA}\| + \|\lambda\,\overrightarrow{MB}\| = |1-\lambda|\rho + |\lambda|\rho$$

Liegt der Punkt X zwischen A und B, so gilt $0 < \lambda < 1$ sowie $0 < 1-\lambda < 1$ und daher

$$\|\overrightarrow{MX}\| \le (1-\lambda)\rho + \lambda\rho = \rho\ .$$

Da die Sekante AB und die Kugel k(M, ρ) höchstens zwei gemeinsame Punkte haben, kann ein von A und B verschiedener Punkt X kein gemeinsamer Punkt sein. Also darf in der Ungleichung $\|\overrightarrow{MX}\| \le \rho$ das Gleichheitszeichen ausgeschlossen werden. Der Punkt X muss daher innerhalb der Kugel liegen.

Die Umkehrung dieses Sachverhalts ergibt sich aus der zweiten Behauptung, die wir nachfolgend beweisen.

Beweis der zweiten Behauptung:

Es gelte $\lambda > 1$:

Aus der Darstellung $\overrightarrow{MX} = (1-\lambda)\overrightarrow{MA} + \lambda\,\overrightarrow{MB} = \lambda\,\overrightarrow{MB} - (\lambda-1)\overrightarrow{MA}$ ergibt sich mit der Folgerung aus der Dreiecksungleichung (14.16)(4):

$$\|\overrightarrow{MX}\| \ge \big|\, \|\lambda\,\overrightarrow{MB}\| - \|(\lambda-1)\overrightarrow{MA}\| \,\big| = |\,\lambda\rho - (\lambda-1)\rho\,| = \rho$$

Da das Gleichheitszeichen ausgeschlossen werden darf, gilt $\|\overrightarrow{MX}\| > \rho$. X muss außerhalb der Kugel liegen.

Es gelte $\lambda < 0$:

Aus der Darstellung $\overrightarrow{MX} = (1-\lambda)\overrightarrow{MA} + \lambda\,\overrightarrow{MB} = (1-\lambda)\overrightarrow{MA} - (-\lambda)\overrightarrow{MB}$ ergibt sich mit der Folgerung aus der Dreiecksungleichung (14.16)(4):

$$\|\overrightarrow{MX}\| \ge \|(1-\lambda)\overrightarrow{MA}\| - \|-\lambda\,\overrightarrow{MB}\| = |\,(1-\lambda)\rho - (-\lambda)\rho\,| = \rho$$

Da das Gleichheitszeichen ausgeschlossen werden darf, gilt $\|\overrightarrow{MX}\| > \rho$. X muss außerhalb der Kugel liegen.

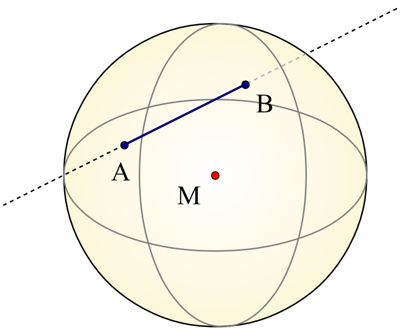
Damit ist auch die zweite Behauptung richtig, weil sich ihre Umkehrung aus der bereits bewiesenen ersten Behauptung ergibt.

Der soeben gesicherte Sachverhalt motiviert eine weitere Begriffsübertragung:

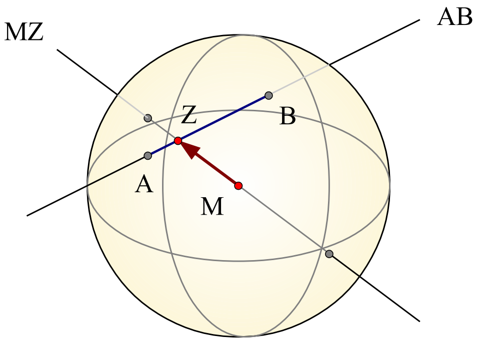
<u>(24.8) Definition</u>

A und B seien zwei verschiedene Punkte einer Kugel k(M, ρ).

Dann heiße die Strecke $\overline{AB}$ *Sehne der Kugel mit den Endpunkten A und B*.



Unsere Anschauung sagt uns, dass die Zentrale durch den Mittelpunkt einer Sehne senkrecht auf der zugehörigen Sekante stehen sollte. Auch dieser Sachverhalt gilt im Modellraum.



<u>(24.9) Satz</u>

Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ) und zwei verschiedene Punkte A und B, die auf der Kugel liegen.

Z sei ein Punkt der Sekante AB. Dann gilt:

Die Zentrale MZ steht genau dann senkrecht auf der Sekante AB, wenn der Punkt Z der Mittelpunkt der Sehne $\overline{AB}$ ist.

Beweis:

Da Z ein Punkt der Sekante sein soll, gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\vec{Z} = \vec{A} + \mu\,\overrightarrow{AB}$.

Setzen wir zur Abkürzung $\vec{u} := \overrightarrow{AB}$, so gilt

$$\vec{A} = \vec{Z} - \mu\,\vec{u} \text{ und } \vec{B} = \vec{A} + \vec{u} = (\vec{Z} - \mu\,\vec{u}) + \vec{u} = \vec{Z} + (1-\mu)\,\vec{u}\,.$$

Da die beiden Punkte A und B auf der Kugel liegen sollen, gilt $\overrightarrow{MA}^2 = \rho^2 = \overrightarrow{MB}^2$.

Daraus ergibt sich nun der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
&(-\vec{M} + \vec{A})^2 = (-\vec{M} + \vec{B})^2 \\
\Leftrightarrow\quad & (-\vec{M} + (\vec{Z} - \mu\,\vec{u}))^2 = (-\vec{M} + (\vec{Z} + (1-\mu)\,\vec{u}))^2 \\
\Leftrightarrow\quad & (\overrightarrow{MZ} - \mu\,\vec{u})^2 = (\overrightarrow{MZ} + (1-\mu)\,\vec{u})^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \overrightarrow{MZ}^2 - 2\,\mu\,\overrightarrow{MZ}\cdot\vec{u} + \mu^2\,\vec{u}^2 = \overrightarrow{MZ}^2 + 2\,(1-\mu)\,\overrightarrow{MZ}\cdot\vec{u} + (1-\mu)^2\,\vec{u}^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \overrightarrow{MZ}^2 - 2\,\mu\,\overrightarrow{MZ}\cdot\vec{u} + \mu^2\,\vec{u}^2 = \overrightarrow{MZ}^2 + 2\,\overrightarrow{MZ}\cdot\vec{u} - 2\,\mu\,\overrightarrow{MZ}\cdot\vec{u} + \vec{u}^2 - 2\,\mu\,\vec{u}^2 + \mu^2\,\vec{u}^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = 2\,\overrightarrow{MZ}\cdot\vec{u} + (1-2\mu)\,\vec{u}^2 \qquad (*)
\end{aligned}$$

Mit dieser Gleichung werden wir nun beide Richtungen der Behauptung beweisen.

„ ⇒ “:

Steht die Zentrale MZ senkrecht auf der Sekante AB, dann gilt $\overrightarrow{MZ}\cdot\vec{u} = 0$.

Damit folgt aber aus der Gleichung (*): $0 = (1-2\mu)\,\vec{u}^2$ und damit $\mu = \frac{1}{2}$.

Das bedeutet (vergleiche Satz (7.11)), dass $\vec{Z} = \vec{A} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$ der Mittelpunkt der Sehne $\overline{AB}$ ist.

„ ⇐ “:

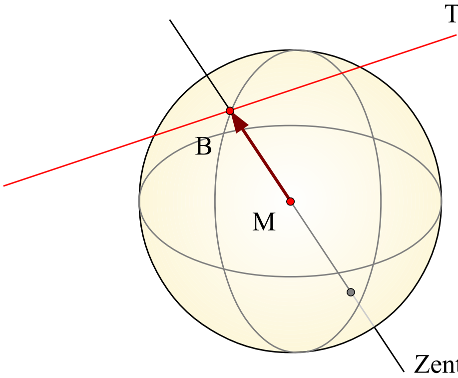
Ist umgekehrt Z der Mittelpunkt der Sehne $\overline{AB}$, so muss $\mu = \frac{1}{2}$ gelten.

Die Gleichung (*) liefert damit: $\Leftrightarrow\quad 0 = 2\,\overrightarrow{MZ}\cdot\vec{u}$

Das heißt, dass die Zentrale MZ senkrecht auf der Sekante AB steht.

Je enger die beiden Durchstoßpunkte einer Sekante zueinander rücken, desto kürzer wird die zugehörige Kugelsehne. Verschmelzen die beiden Durchstoßpunkte, wird aus der Sekante eine Tangente. Unsere Anschauung sagt uns, dass dieser Übergang folgende Konsequenzen haben müsste:

- Der Sehnenmittelpunkt fällt mit dem verbleibenden einzigen Punkt zusammen, den die Tangente mit dem Kreis gemeinsam hat. Folglich müsste die Zentrale durch diesen Punkt die Tangente senkrecht schneiden.
- Kein Punkt der Tangente dürfte im Innern der Kugel liegen.



Unsere Vermutungen bestätigt das folgende Theorem.

(24.10) Tangententheorem

Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ), ein Punkt B, der auf der Kugel liegt, und eine Gerade g, die durch B verläuft. Dann gilt:

Die Gerade g ist genau dann eine Tangente der Kugel, wenn sie senkrecht zur Zentralen MB verläuft.

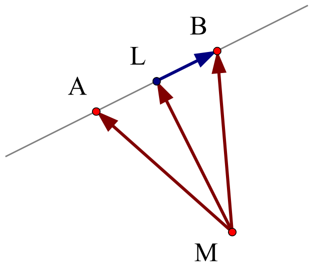
Beweis:

„ ⇒ “:

Sei g eine Tangente der Kugel.

Angenommen, die Zentrale MB stünde nicht senkrecht auf g.

Dann wäre der Lotfußpunkt L von M auf g von B verschieden und folglich $\overrightarrow{LB}$ ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor von g.



Da ML eine Normale von g wäre, würde $\overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{LB} = 0$ gelten.

Der Punkt A, definiert durch $\vec{A} = \vec{L} - \overrightarrow{LB}$, wäre von B verschieden.

Es gälte aber:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}^2 &= \left(-\vec{M} + (\vec{L} - \overrightarrow{LB})\right)^2 = (\overrightarrow{ML} - \overrightarrow{LB})^2 \\ &= \overrightarrow{ML}^2 - 2\,\overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LB}^2 = \overrightarrow{ML}^2 + \overrightarrow{LB}^2 \\ \overrightarrow{MB}^2 &= \left(-\vec{M} + (\vec{L} + \overrightarrow{LB})\right)^2 = (\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LB})^2 \\ &= \overrightarrow{ML}^2 + 2\,\overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LB}^2 = \overrightarrow{ML}^2 + \overrightarrow{LB}^2\end{aligned}$$

Also gäbe es einen zweiten von B verschiedenen Geradenpunkt A, der wie B auf der Kugel liegt.

Im Widerspruch zur Voraussetzung wäre g keine Tangente. Die Annahme, MB stünde nicht senkrecht auf g, muss daher falsch sein.

„ ⇐ “:

Gelte nun $MB \perp g$.

Ist X ein von B verschiedener Punkt von g, so ist $\overrightarrow{BX}$ ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor von g. Nach Voraussetzung gilt $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BX} = 0$.

Wir schätzen nun den Abstand von X zu M ab.

$$d(X, M)^2 = \overrightarrow{MX}^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BX})^2 = \overrightarrow{MB}^2 + 2\,\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BX} + \overrightarrow{BX}^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{BX}^2 > \overrightarrow{MB}^2 = \rho^2$$

Das Ungleichheitszeichen in der Abschätzung folgt aus $\|\overrightarrow{BX}\| > 0$.

Damit ist gesichert, dass X außerhalb der Kugel k(M, ρ) liegt.

Bis auf B liegen alle Geradenpunkte außerhalb der Kugel. Die Gerade g ist eine Tangente der Kugel.

Der Beweis der Umkehrung zeigt, dass eine Tangente eine Kugel „von außen in genau einem Punkt berührt“. Das motiviert die folgenden Sprechweisen.

(24.11) Vereinbarung

Gegeben sei eine Kugel k und eine Gerade g.

Ist g eine Tangente der Kugel k, so nennen wir ihren gemeinsamen Punkt *Berührpunkt* der Tangente.

Ist g eine Sekante der Kugel K, so nennen wir ihre beiden gemeinsamen Punkte *Schnittpunkte* oder *Durchstoßpunkte* der Sekante.

Der Beweis der Hinrichtung des Tangententheorems konstruiert mit Hilfe des Lotfußpunktes des Kugelmittelpunktes auf der Geraden g einen zweiten Schnittpunkt mit der Kugel.

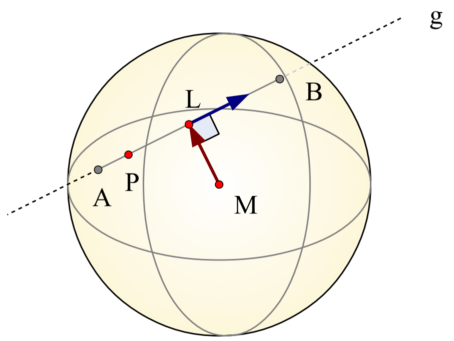
Dahinter steckt der Gedanke, dass der Lotfußpunkt der Geradenpunkt ist, der den kürzesten Abstand zum Kugelmittelpunkt aufweist. Da die Gerade g nach beiden Seiten unendliche Ausdehnung aufweist, so die dem Beweis zugrunde liegende Überlegung, sollte es neben dem Punkt B einen weiteren Punkt A auf der Geraden geben, der vom Mittelpunkt der Kugel genauso weit wie der Punkt B entfernt ist und deshalb ein Kugelpunkt ist ...

Wir verallgemeinern diese Überlegung:

(24.12) Bemerkung

Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ) und eine Gerade g.

Liegt ein Punkt P der Geraden g innerhalb der Kugel, so ist g eine Sekante.



Beweis:

Gemäß Satz (18.11) ist der Lotfußpunkt L des Kugelmittelpunktes M auf g der Geradenpunkt, der den kürzesten Abstand zu M hat.

Liegt der Geradenpunkt P innerhalb der Kugel, dann muss das erst recht für den Lotfußpunkt L gelten. Das bedeutet $d(L, M) < \rho$ und deshalb $\overrightarrow{ML}^2 < \rho^2$.

Sei nun $\vec{u}$ ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor von g.

Dann ist $\vec{X} = \vec{L} + \lambda\,\vec{u}$ eine gültige Punktrichtungsgleichung von g, wobei wegen der Lotfußpunkteigenschaft von L zusätzlich $\overrightarrow{ML} \cdot \vec{u} = 0$ gilt.

Wir untersuchen g und k(M, ρ) auf gemeinsame Punkte:

$$X \in g \cap k \;\Leftrightarrow\; \exists\,\lambda \in \mathbb{R} : \left(\vec{L} + \lambda\,\vec{u} - \vec{M}\right)^2 = \rho^2$$

Es folgt:

$$\left(\vec{L} + \lambda\,\vec{u} - \vec{M}\right)^2 = \rho^2 \;\Leftrightarrow\; \left(\overrightarrow{ML} + \lambda\,\vec{u}\right)^2 = \rho^2 \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{ML}^2 + 2\lambda\,\overrightarrow{ML} \cdot \vec{u} + \lambda^2\,\vec{u}^2 = \rho^2$$
$$\Leftrightarrow\; \overrightarrow{ML}^2 + \lambda^2\,\vec{u}^2 = \rho^2 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2\,\vec{u}^2 = \rho^2 - \overrightarrow{ML}^2$$

Wegen $\overrightarrow{ML}^2 < \rho^2$ ist die rechte Gleichungsseite positiv. Es gibt daher zwei verschiedene Lösungen für λ in der äquivalenten Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{\rho^2 - \overrightarrow{ML}^2}{\vec{u}^2}$$

Die Kugel k und die Gerade g haben daher zwei gemeinsame Punkte. Die Gerade g ist eine Sekante von k.

Sowie eine Gerade die Unendlichkeit repräsentiert, ist eine Kugel der Inbegriff von Endlichkeit. Die Bemerkung (24.12) bestätigt unsere Anschauung, dass sich Unendlichkeit von Endlichkeit nicht einfangen lässt.

(24.13) Folgerung

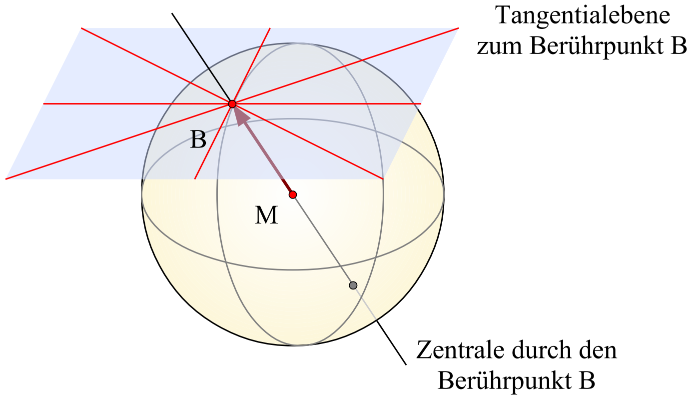
Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ) und eine Gerade g.

Ist g eine Passante der Kugel, so liegt kein Punkt von g innerhalb der Kugel.

Wir kehren gedanklich noch einmal zu den Tangenten einer Kugel zurück. Ist auf einer Kugel k(M, ρ) ein Berührpunkt B vorgegeben, so gibt es offensichtlich unendlich viele Tangenten, die durch diesen Punkt B verlaufen. Als Richtungsvektor kann jeder (vom Nullvektor verschiedene) Vektor gewählt werden, der orthogonal zum Vektor $\overrightarrow{MB}$ ist.

Der Satz (16.6) garantiert, dass es zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gibt, die beide orthogonal zum Vektor $\overrightarrow{MB}$ sind. Nach dem 1. Orthogonalitätstheorem (15.5) ist dann auch jede Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal zu $\overrightarrow{MB}$.

Durch diese Überlegungen wird klar, dass die Gesamtheit aller Tangenten eine Ebene bildet, die „tangential“ zur Kugel k(M, ρ) angeordnet ist. Das soll heißen, dass diese Ebene und die Kugel k(M, ρ) nur den vorgegeben Berührpunkt als gemeinsamen Punkt besitzen.



(24.14) Definition

Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ).

Eine Ebene t heiße *Tangentialebene der Kugel*, wenn sie und die Kugel nur genau einen gemeinsamen Punkt haben. Dieser eindeutig bestimmte Punkt heiße *Berührpunkt der Tangentialebene*.

Im Folgenden wird gezeigt, dass jede Kugel an jedem ihrer Punkte durch genau eine Tangentialebene berührt wird. Zur Beschreibung der Tangentialebene durch eine Normalengleichung wird als Normalenvektor standardmäßig der Vektor verwendet, der den Mittelpunkt der Kugel auf den Berührpunkt abbildet („verschiebt“).

(24.15) Satz

Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ) und ein Punkt B auf der Kugel.

Dann gibt es genau eine Tangentialebene t, die die Kugel im Punkt B berührt. Diese Ebene t wird beschrieben durch die Gleichung $\overrightarrow{MB}\cdot\vec{X}-\overrightarrow{MB}\cdot\vec{B}=0$.

Existenzbeweis:

Offenbar enthält die Ebene $t:\overrightarrow{MB}\cdot\vec{X}-\overrightarrow{MB}\cdot\vec{B}=0$ den Punkt B. B ist daher ein gemeinsamer Punkt der Kugel k und der Ebene t.

Damit t eine Tangentialebene der Kugel ist, muss nachgewiesen werden, dass kein weiterer Punkt X der Ebene t auf der Kugel k liegt.

Betrachten wir deshalb einen Punkt X von t, der auf k liegt.

Dann gilt unter Verwendung von $\vec{X}=\vec{B}+\overrightarrow{BX}$ der Reihe nach:

$$\rho^2=\overrightarrow{MX}^2=(-\vec{M}+\vec{X})^2=(-\vec{M}+\vec{B}+\overrightarrow{BX})^2=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BX})^2=\overrightarrow{MB}^2+2\,\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{BX}^2$$

Da X eine Punkt der Ebene t ist, gilt $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BX}=0$. Also folgt:

$$\rho^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{BX}^2=\rho^2+\overrightarrow{BX}^2$$

Der Vektor $\overrightarrow{BX}$ muss der Nullvektor sein und daher der Punkt X mit dem Punkt B übereinstimmen.

Die Ebene t und die Kugel k haben also nur den Punkt B gemeinsam. Die Ebene t ist eine Tangentialebene der Kugel k mit dem Berührpunkt B.

Der Existenzbeweis hätte auch durch Rückgriff auf das Tangententheorem geführt werden können. Ist nämlich X ein von B verschiedener Punkt der Ebene t, so stehen die Geraden BX und MB senkrecht aufeinander. Das heißt aber nach Theorem (24.10), dass BX eine Tangente der Kugel ist und daher nur den Punkt B, nicht aber den Punkt X mit der Kugel k gemeinsam hat.

Eindeutigkeitsbeweis:

Angenommen, es gäbe eine zweite von t verschiedene Tangentialebene e mit dem Berührpunkt B.

Wäre B der Lotfußpunkt von M auf e, so wären e und t identisch, weil dann $\overrightarrow{MB}$ auch ein Normalenvektor von e wäre. Also müsste der Lotfußpunkt L von M auf e von B verschieden sein.

Daraus folgt, dass dann gemäß Satz (15.22) $d(L,M)<d(B,M)$ gelten müsste. Das hieße aber, dass der Punkt L der Ebene e innerhalb der Kugel läge.

Die Gerade BL, die komplett in der Ebene e verläuft, wäre gemäß Bemerkung (24.12) eine Sekante. Die Ebene e hätte also mehr als einen Punkt mit der Kugel k gemeinsam und könnte daher keine Tangentialebene sein.

Da die obige Annahme auf einen Widerspruch führt, kann es außer t keine weitere Tangentialebene mit dem Berührpunkt B geben.

Der Beweis zeigt, dass bei der Bestimmung der Lagebeziehung zwischen Kugel und Ebene der Abstand des Kugelmittelpunkts zu seinem Lotfußpunkt auf der Ebene die entscheidende Rolle spielt.

Bevor wir diesen Gedanken im Satz (24.17) ausformulieren, halten wir kurz fest, was beim vorangegangenen Eindeutigkeitsbeweis deutlich geworden ist:

<u>(24.16) Bemerkung</u>

Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ) und ein Punkt B auf der Kugel.

Ist t die Tangentialebene der Kugel mit dem Berührpunkt B, so ist B der Lotfußpunkt des Kugelmittelpunkts M auf der Ebene t.

Beweis:

Gemäß Satz (24.15) wird t durch die Gleichung $\overrightarrow{MB}\cdot\vec{X}-\overrightarrow{MB}\cdot\vec{B}=0$ beschrieben. Der Vektor $\overrightarrow{MB}$ ist also ein Normalenvektor von t und $l:\vec{X}=\vec{M}+\mu\,\overrightarrow{MB}$ das Lot von M auf t.

Mit μ = 1 liefert die Punktrichtungsgleichung den Punkt B auf der Ebene t.

Jetzt folgt das angekündigte Abstandskriterium:

<u>(24.17) Satz</u>

Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ) und eine Ebene e. Sei L der Lotfußpunkt des Kugelmittelpunkts M auf e.

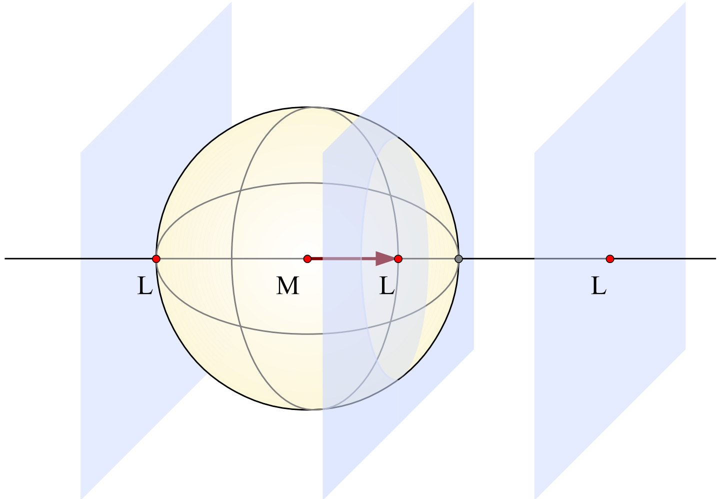
Dann gilt:

(a) Die Ebene e ist genau dann eine Tangentialebene der Kugel, wenn $d(L,M)=\rho$ gilt.

(b) Die Ebene e hat mit der Kugel genau dann mehr als einen Punkt gemeinsam, wenn $d(L,M)<\rho$ gilt.

(c) Die Ebene e hat genau dann mit der Kugel keinen Punkt gemeinsam, wenn $d(L,M)>\rho$ gilt.

(Illustration siehe nächste Seite)



Beweis:

zu (a) „ $\Rightarrow$ “:

Wenn e eine Tangentialebene ist, dann berührt sie die Kugel k in genau einem Punkt B.

Nach Bemerkung (24.16) stimmt der Punkt B mit dem Lotfußpunkt L überein. Da B ein Punkt von k ist, gilt $d(L, M) = d(B, M) = \rho$.

zu (a) „ $\Leftarrow$ “:

Gelte nun $d(L, M) = \rho$.

Daraus folgt, dass L ein Punkt der Kugel k(M, ρ) ist.

Weil L der Lotfußpunkt von M auf e sein soll, ist der Vektor $\overrightarrow{ML}$ ein Normalenvektor von e. Die Ebene e besitzt also die Normalengleichung $\overrightarrow{ML} \cdot \vec{X} - \overrightarrow{ML} \cdot \vec{L} = 0$.

Also ist e die Tangentialebene der Kugel k(M, ρ) mit dem Berührpunkt L.

zu (b) „ $\Rightarrow$ “:

Wir setzen nun voraus, dass die Ebene e und die Kugel k mehr als einen gemeinsamen Punkt, etwa A und B, besitzen. Mit den Punkten A und B gehört auch die Sehne $\overline{AB}$ zur Ebene e.

Gemäß Satz (24.7) liegen die Punkte, die auf der Sehne zwischen ihren Endpunkten A und B liegen, innerhalb der Kugel. Ist P ein solcher Punkt, so gilt $d(P, M) < \rho$.

Nun ist aber nach Satz (15.22) der Lotfußpunkt L der Punkt der Ebene e, der den geringsten Abstand zum Kugelmittelpunkt M hat. Daraus folgt:

$$d(L, M) < d(P, M) < \rho$$

zu (b) „ $\Leftarrow$ “:

Nach Voraussetzung gilt $d(L, M) < \rho$. Der Lotfußpunkt L liegt daher innerhalb der Kugel.

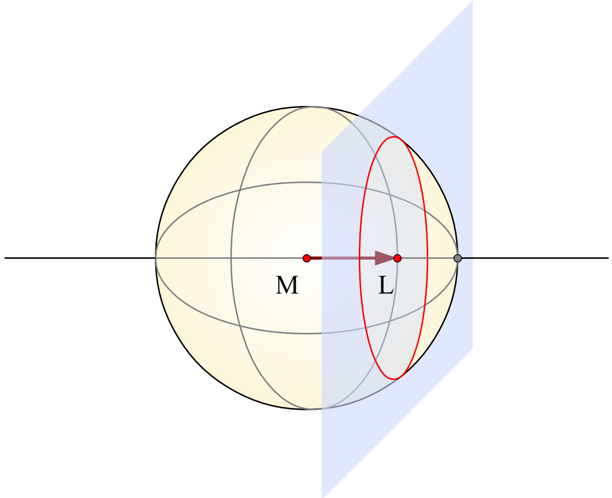
Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene e. Dann ist jede Linearkombination $\vec{w} := \lambda\, \vec{u} + \mu\, \vec{v}$ ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor der Ebene e, solange nicht $\lambda = \mu = 0$ gilt.

Eine Gerade g, die durch eine Punktrichtungsgleichung der Form $\vec{X} := \vec{L} + \varphi\, \vec{w}$ erzeugt wird, ist eine Gerade, die vollständig innerhalb von e verläuft. Da auf ihr mit L ein innerer Punkt der Kugel liegt, muss sie gemäß Bemerkung (24.12) eine Sekante sein. Die beiden voneinander verschiedenen Punkte, in denen die Sekante g die Kugel durchstößt, sind auch Punkte der Ebene e. Die Ebene e und die Kugel k haben mindestens zwei verschiedene gemeinsame Punkte.

zu (c):

Dieser Sachverhalt ergibt sich direkt aus den Aussagen (a) und (b).

Im Beweis der zweiten Schlussrichtung zu Aussage (24.17)(b) wird deutlich, dass eine Ebene mit einer Kugel unendlich viele Punkte gemeinsam hat, wenn der Abstand des Kugelmittelpunktes von seinem Lotfußpunkt auf der Ebene kleiner als der Kugelradius ist. Unserer Anschauung nach liegen die gemeinsamen Punkte auf einem Kreis um den Lotfußpunkt.



Nun haben wir zwar bislang nicht definiert, was wir unter einem Kreis im Modellraum verstehen wollen. Das ist aber schnell geschehen, wenn wir uns die Eigenschaften eines Kreises klar machen.

Ein Kreis ist eben, das heißt, alle Kreispunkte und der Kreismittelpunkt liegen in einer Ebene. Ein Kreis ist also die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem gegebenen Kreismittelpunkt einen gleichen festgelegten Abstand haben. Zur Beschreibung eines Kreises benötigen wir daher einen Normalenvektor, einen Kreismittelpunkt und einen Radius:

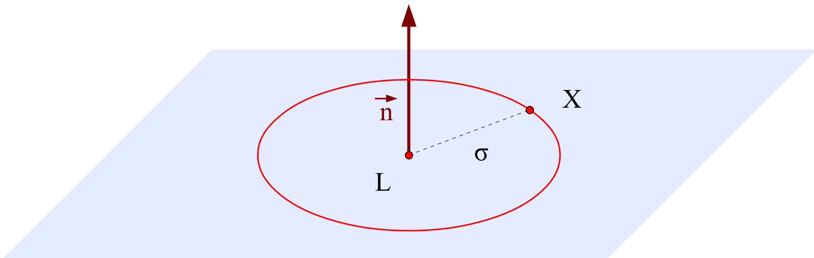
<u>(24.18) Definition</u>

Gegeben sei ein Punkt L des Modellraumes, ein Vektor $\vec{n}$ und eine positive reelle Zahl σ.

Sei e die Ebene, die durch den Punkt L und den Normalenvektor $\vec{n}$ eindeutig bestimmt ist.

Dann verstehen wir unter dem *Kreis r mit dem Mittelpunkt L, dem Normalenvektor* $\vec{n}$ *und dem Radius* σ die Menge aller Punkte X der Ebene e, die von L den Abstand σ haben, kurz:

$$r(L, \vec{n}, \sigma) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{n} \cdot \overrightarrow{LX} = 0 \ \wedge \ \overrightarrow{LX}^2 = \sigma^2\}$$



Jetzt kommen wir noch einmal auf die Situation zurück, in der eine Ebene eine Kugel nicht nur als Tangentialebene berührt, sondern echt „schneidet“, weil der Abstand des Kugelmittelpunktes zu seinem Lotfußpunkt auf der Ebene kleiner als der Kugelradius ist.

<u>(24.19) Satz</u>

Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ) und eine Ebene e.

L sei der Lotfußpunkt des Kugelmittelpunkts M auf der Ebene e.

Ist der Abstand von M zu L kleiner als der Kugelradius ρ, so stimmt die Menge der gemeinsamen Punkte der Kugel k(M, ρ) und der Ebene e mit dem Kreis überein, der den Mittelpunkt L, den Normalenvektor $\overrightarrow{ML}$ und den Radius $\sigma = \sqrt{\rho^2 - \overrightarrow{ML}^2}$ besitzt:

$$k(M, \rho) \cap e = r\left(L, \overrightarrow{ML}, \sqrt{\rho^2 - \overrightarrow{ML}^2}\right)$$

Beweis:

„ $\subset$ “:

Sei P ein gemeinsamer Punkt der Kugel k(M, ρ) und der Ebene e.

Da L der Lotfußpunkt von M auf e sein soll, ist $\overrightarrow{ML}$ ein Normalenvektor von e.

Da P ein Punkt der Ebene ist, muss für die Zugehörigkeit zum Kreis $r\left(L\,,\overrightarrow{ML}\,,\sqrt{\rho^2-\overrightarrow{ML}^2}\right)$ nur noch die Beziehung $d\left(P\,,L\right)=\sqrt{\rho^2-\overrightarrow{ML}^2}$ nachgewiesen werden.

Da P auf der Kugel k(M, ρ) liegt, gilt der Reihe nach

$$\overrightarrow{MP}^2 = \left(\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{LP}\right)^2 = \overrightarrow{ML}^2+2\,\overrightarrow{ML}\cdot\overrightarrow{LP}+\overrightarrow{LP}^2$$

Weil L und P Punkte der Ebene e sind, ist $\overrightarrow{LP}$ ein Richtungsvektor von e. Daraus folgt $\overrightarrow{ML}\cdot\overrightarrow{LP}=0$.

Also erhalten wir die Gleichung $\overrightarrow{MP}^2=\overrightarrow{ML}^2+\overrightarrow{LP}^2$.

Daraus ergibt sich sofort $\overrightarrow{LP}^2=\overrightarrow{MP}^2-\overrightarrow{ML}^2$ und damit $d\left(P\,,L\right)=\sqrt{\rho^2-\overrightarrow{ML}^2}$.

„ $\supset$ “:

Sei nun umkehrt P ein Punkt des Kreises $r\left(L\,,\overrightarrow{ML}\,,\sqrt{\rho^2-\overrightarrow{ML}^2}\right)$.

Weil L ein Punkt der Ebene e und $\overrightarrow{ML}$ ein Normalenvektor von e ist, muss der genannte Kreis in der Ebene e liegen. Wir müssen nur noch nachweisen, dass jeder Kreispunkt P auch auf der Kugel k(M, ρ) liegt.

Ist P ein Kreispunkt, so ist $\overrightarrow{LP}$ ein Richtungsvektor von e und deshalb $\overrightarrow{ML}\cdot\overrightarrow{LP}=0$.

Damit folgt

$$\overrightarrow{MP}^2 = \left(\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{LP}\right)^2 = \overrightarrow{ML}^2+2\,\overrightarrow{ML}\cdot\overrightarrow{LP}+\overrightarrow{LP}^2 = \overrightarrow{ML}^2+\overrightarrow{LP}^2 = \overrightarrow{ML}^2+\left(\sqrt{\rho^2-\overrightarrow{ML}^2}\right)^2 = \rho^2$$

Also liegt P auch auf der Kugel k(M, ρ).

Aus den wechselseitigen Inklusionen der Punktmengen folgt die behauptete Übereinstimmung.

Wenn wir bisher Tangentialebenen betrachtet haben, dann sind wir gedanklich von einem Punkt B **auf** der Kugel ausgegangen, durch den eine Ebene so verlaufen soll, dass sie die Kugel nur in dem vorgegebenen Kugelpunkt berührt. Satz (24.15) sagt, dass es in dieser Situation genau eine Lösung des Konstruktionsproblems gibt.

Bei der Konstruktion von Tangentialebenen von einem Punkt P **innerhalb** der Kugel auszugehen, ist nicht sinnvoll, weil schon aus Satz (24.17)(b) folgt, dass es keine Tangentialebene geben kann, die einen Punkt enthält, der innerhalb der Kugel liegt.

Wenn wir jedoch einen Punkt P betrachten, der **außerhalb** der Kugel liegt, dann sollte es nicht nur eine, sondern sogar unendlich viele Tangentialebenen der Kugel geben, die diesen Punkt enthalten.

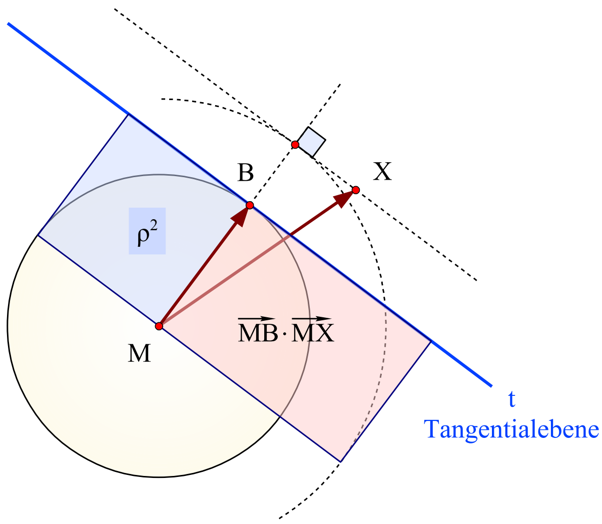
Für die Prüfung dieses Sachverhalts wird die Gleichungen der Tangentialebenen in eine neue für diesen Zweck praktische Form überführt. Ihre Sinnhaftigkeit illustriert die beigefügte Schnittzeichnung. Unter Bezugnahme auf die Veranschaulichung des Betrags des Skalarprodukts (siehe §14) verdeutlicht die Zeichnung, dass der Punkt X genau dann auf der Tangentialebene t liegt, wenn das rosa unterlegte Rechteck und das blau unterlegte Quadrat denselben Flächeninhalt besitzen.

<u>(24.20) Bemerkung</u>

Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ) und ein Punkt B auf der Kugel.

Dann wird die Tangentialebene t zum Berührpunkt B durch folgende Gleichung beschrieben:

$$t:\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MX}=\rho^2$$



Beweis:

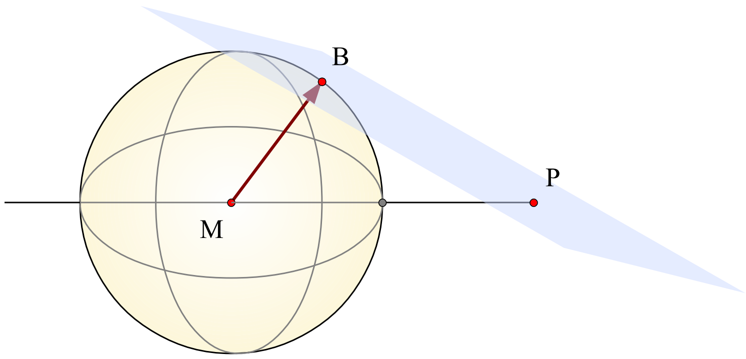
Gemäß Satz (24.15) gilt $t:\overrightarrow{MB}\cdot\vec{X}-\overrightarrow{MB}\cdot\vec{B}=0$.

Für jeden Raumpunkt X folgt daher der Reihe nach:

$$\overrightarrow{MB}\cdot\vec{X}-\overrightarrow{MB}\cdot\vec{B}=0 \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BX}=0$$

$$\Leftrightarrow\; \overrightarrow{MB}\cdot\left(\overrightarrow{MX}-\overrightarrow{MB}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\; \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MX}-\overrightarrow{MB}^2=0 \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MX}-\rho^2=0$$



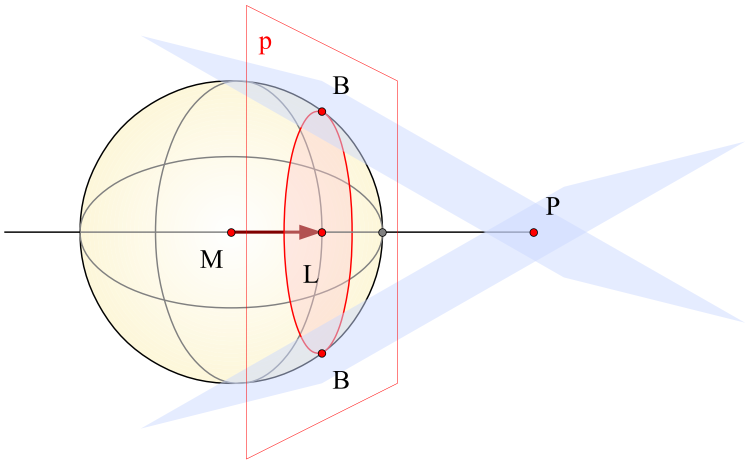
Soll nun eine Tangentialebene mit unbekanntem Berührpunkt B durch den vorgegebenen Punkt P verlaufen, der außerhalb der Kugel liegt, so muss der vorangehenden Bemerkung (24.20) zufolge der Punkt B die Gleichung $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MP}=\rho^2$ erfüllen.

Dass es sich bei dieser Gleichung um einen Ebenengleichung handelt, zeigt die folgende Umformung, in der der Ortsvektor von B durch die Vektorvariable $\vec{X}$ ersetzt worden ist:

$$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MX}=\rho^2 \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{MP}\cdot\vec{X}-\overrightarrow{MP}\cdot\vec{M}=\rho^2 \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{MP}\cdot\vec{X}-(\overrightarrow{MP}\cdot\vec{M}+\rho^2)=0$$

Die Ebene p, die durch diese Gleichung beschrieben wird, besitzt den Normalenvektor $\overrightarrow{MP}$.

Da die Berührpunkte B der Tangentialebenen, die durch den Punkt P verlaufen, auch Punkte der Kugel k(M, ρ) sein müssen, bilden diese Berührpunkte als Schnittmenge der Ebene p und der Kugel einen Kreis. Sein Mittelpunkt ist der Lotfußpunkt L von M auf p.



Sei l das Lot von M auf p; dann besitzt l die Punktrichtungsgleichung $\vec{X}=\vec{M}+\lambda\,\overrightarrow{MP}$. Der Schnittpunkt des Lotes l mit der Ebene p ist der gesuchte Lotfußpunkt L:

$$X\in P\cap l \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{MP}\cdot(\vec{M}+\lambda\,\overrightarrow{MP})-(\overrightarrow{MP}\cdot\vec{M}+\rho^2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{MP}\cdot\vec{M}+\lambda\,\overrightarrow{MP}^2-\overrightarrow{MP}\cdot\vec{M}-\rho^2=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \lambda\,\overrightarrow{MP}^2-\rho^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=\frac{\rho^2}{\overrightarrow{MP}^2}$$

Der Lotfußpunkt L besitzt den Ortsvektor $\vec{L}=\vec{M}+\dfrac{\rho^2}{\overrightarrow{MP}^2}\overrightarrow{MP}$.

Als Punkt der Ebene p erfüllt L die Gleichung von p; daraus ergibt sich die für diverse Berechnungsaufgaben wichtige Beziehung $\quad\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{ML}=\rho^2$.

Um den Radius σ des Kreises zu berechnen, wählen wir unter den Berührpunkten der Tangentialebenen, die durch P verlaufen, einen Punkt B aus. Dann gilt $\sigma^2=\overrightarrow{LB}^2$ und, da $\overrightarrow{LB}$ ein Richtungsvektor der Ebene p ist, $\overrightarrow{ML}\cdot\overrightarrow{LB}=0$.

Es folgt der Reihe nach:

$$\overrightarrow{MB}^2=\rho^2 \quad\Rightarrow\quad (\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{LB})^2=\rho^2 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{ML}^2+2\,\overrightarrow{ML}\cdot\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{LB}^2=\rho^2 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{ML}^2+0+\sigma^2=\rho^2$$

Mit $\overrightarrow{ML} = \frac{\rho^2}{\overrightarrow{MP}^2}\,\overrightarrow{MP}$ folgt weiter:

$$\sigma^2 = \rho^2 - \overrightarrow{ML}^2 = \rho^2 - \left(\frac{\rho^2}{\overrightarrow{MP}^2}\,\overrightarrow{MP}\right)^2 = \rho^2 - \frac{\rho^4}{\overrightarrow{MP}^4}\,\overrightarrow{MP}^2 = \rho^2\left(1 - \frac{\rho^2}{\overrightarrow{MP}^2}\right)$$

Die vorangegangenen Überlegungen beweisen den nachfolgenden Satz.

(24.21) Satz

Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ) und ein Punkt P, der sich außerhalb der Kugel befindet.
Dann liegen die Berührpunkte der Tangentialebenen, die durch den Punkt P verlaufen, in der Ebene

$$p : \overrightarrow{MP}\cdot\vec{X} - \overrightarrow{MP}\cdot\vec{M} = \rho^2 .$$

Der Lotfußpunkt L des Kugelmittelpunktes M auf p ist gegeben durch $\vec{L} = \vec{M} + \frac{\rho^2}{\overrightarrow{MP}^2}\,\overrightarrow{MP}$.

Für die drei Punkte M, P und L gilt die Beziehung $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{ML} = \rho^2$.
Die Berührpunkte der Tangentialebenen, die durch den Punkt P verlaufen, bilden in der Ebene p und auf der Kugel k(M, ρ) den Kreis $r\left(L\,,\overrightarrow{MP}\,,\sqrt{\rho^2\left(1 - \frac{\rho^2}{\overrightarrow{MP}^2}\right)}\right)$.

Die Ebene $p : \overrightarrow{MP}\cdot\vec{X} - \overrightarrow{MP}\cdot\vec{M} = \rho^2$ erhält einen besonderen Namen.

(24.22) Definition

Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ) und ein Punkt P, der vom Kugelmittelpunkt M verschieden ist.
Dann heiße die Ebene $p : \overrightarrow{MP}\cdot\vec{X} - \overrightarrow{MP}\cdot\vec{M} = \rho^2$ *Polarebene des Pols P bezüglich der Kugel k(M, ρ)*.

Liegt der Punkt P außerhalb der Kugel und ist L der Lotfußpunkt des Kugelmittelpunktes auf der Polarebene p, so heiße der Kreis $r\left(L\,,\overrightarrow{MP}\,,\sqrt{\rho^2\left(1 - \frac{\rho^2}{\overrightarrow{MP}^2}\right)}\right)$ *Polarkreis des Pols P auf der Kugel k(M, ρ)*.

Unter Verwendung dieses Begriffes folgt aus dem Satz (24.21):

(24.23) Bemerkung

Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ) und ein Punkt P, der sich außerhalb der Kugel befindet.
Dann liegen die Berührpunkte der Tangentialebenen der Kugel k(M, ρ), die durch den Punkt P verlaufen, auf der Polarebene des Pols P bezüglich der Kugel k(M, ρ).

Offensichtlich bleibt die Gleichung der Polarebene auch dann sinnvoll, wenn die Anforderung an den Punkt P, außerhalb der Kugel zu liegen, aufgegeben wird. Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgangen sein, dass genau diese Anforderung im ersten Teil der Definition (24.22) bereits fallen gelassen wurde.
Die Lage der Polarebenen bezüglich der Kugel beschreibt der Abstand des Kugelmittelpunktes M von seinem Lotfußpunkt auf der Polarebene.

(24.24) Bemerkung

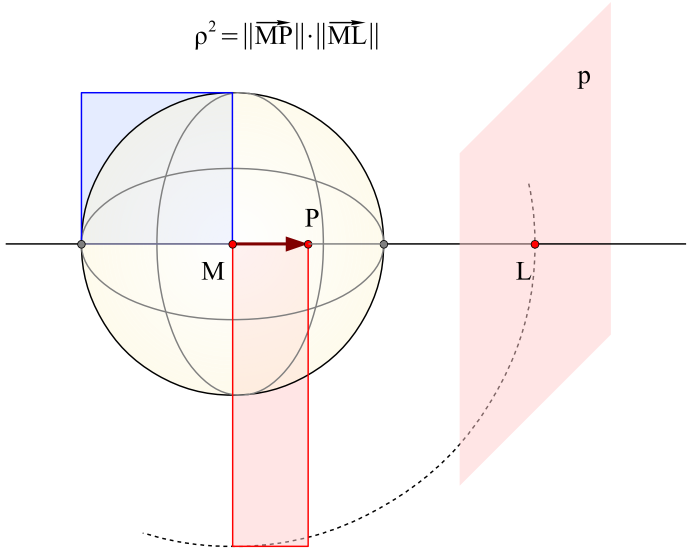
Gegeben sei eine Kugel k(M, ρ) und ein Punkt P, der vom Kugelmittelpunkt M verschieden ist.
Dann beträgt der Abstand des Kugelmittelpunktes M zu seinem Lotfußpunkt L auf der Polarebene des Pols P bezüglich der Kugel

$$d(M\,,L) = \|\overrightarrow{ML}\| = \frac{\rho^2}{\|\overrightarrow{MP}\|} .$$

Beweis:

Im Vorlauf des Satzes (24.21) wurde gezeigt, dass der Lotfußpunkt L durch $\vec{L} = \vec{M} + \frac{\rho^2}{\overrightarrow{MP}^2}\overrightarrow{MP}$ gegeben ist. Dabei wurde kein Gebrauch von der Voraussetzung gemacht, dass P ein Punkt außerhalb der Kugel ist.

Aus der Darstellung $\overrightarrow{ML} = \frac{\rho^2}{\overrightarrow{MP}^2}\overrightarrow{MP}$ ergibt sich direkt die Behauptung.



Polarebene bei innerhalb der Kugel liegendem Pol

Offenbar ist der Abstand des Kugelmittelpunktes M zu seinem Lotfußpunkt L auf der Polarebene des Pols P bezüglich der Kugel genau dann

- kleiner als der Kugelradius ρ, wenn P außerhalb der Kugel
- gleich dem Kugelradius ρ, wenn P auf der Kugel
- größer als der Kugelradius ρ, wenn P innerhalb der Kugel

liegt. Dieser Sachverhalt führt zu folgender Feststellung:

(24.25) Satz

Der Punkt P liegt genau dann außerhalb der Kugel k(M, ρ), wenn seine Polarebene die Kugel in unendlich vielen Punkten schneidet.

Der Punkt P liegt genau dann auf der Kugel k(M, ρ), wenn seine Polarebene mit der Tangentialebene zum Berührpunkt P zusammenfällt.

Der Punkt P liegt genau dann innerhalb der Kugel k(M, ρ), wenn seine Polarebene die Kugel disjunkt passiert.

Wir schließen diesen Paragraphen mit einer anschaulichen Betrachtung. Liegt ein Pol sehr weit entfernt von einer Kugel, das heißt, ist sein Abstand zum Kugelmittelpunkt sehr viel größer als der Kugelradius, liegt die Polarebene nahe am Kugelmittelpunkt.

Wandert nun der Pol auf der Verbindungsgerade zum Kugelmittelpunkt auf die Kugel zu, bewegt sich die Polarebene vom Mittelpunkt weg hin zum Kugelrand.

Trifft der Pol auf die Kugel, kommt es zur Inzidenz mit der Polarebene; sie ist jetzt eine Tangentialebene mit dem Pol als Berührpunkt.

Wandert nun der Pol in die Kugel hinein, entfernt sich die Polarebene von der Kugel. Je näher der Pol an den Mittelpunkt heranrückt, desto weiter entfernt sich die Polarebene von der Kugel.

Der Grenzfall, in dem der Pol mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfällt, ist nicht darstellbar. Die Polarebene verschwindet in der Unendlichkeit des Raumes – so wie die Seele des Mathematikers, wenn sein Ende gekommen ist ;-)