



Übungen zu §24

Übung 24.1

Überprüfe, ob die Punkte A, B und C auf, innerhalb oder außerhalb der Kugel $k(M, \rho)$ liegen.

$$(a) \quad k: \vec{X}^2 = 29 \quad A = (-3; 4; 2) \quad B = (5; 0; 1) \quad C = (5; -2; 1)$$

$$(b) \quad k: \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \right]^2 = 66 \quad A = (-8; 5; 1) \quad B = (8; 5; -4) \quad C = (11; -3; -5)$$

Übung 24.2

Berechne die gemeinsamen Punkte der Gerade g und der Kugel k .

$$(a) \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad k: \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \right]^2 = 179$$

$$(b) \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad k: \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} \right]^2 = 75$$

$$(c) \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad k: \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 49$$

Übung 24.3

Berechne, für welche Parameterwerte t die Geraden der Schar g_t Tangenten, Sekanten oder Passanten der Kugel k sind. Prüfe auch, ob Zentralen unter den Schargeraden vorkommen.

$$(a) \quad k: \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right]^2 = 29 \quad g_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad k: \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right]^2 = 29 \quad g_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ t \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Übung 24.4

(a) Zeige, dass der Mittelpunkt M jeder Kugel $k(M, \rho)$, die die beiden Punkte $A = (2; -5; 11)$ und $B = (-4; -1; 7)$

enthält, auf der Ebene $s: \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} + 21 = 0$ liegt.

(b) Zeige umgekehrt, dass jeder Punkt der Ebene s Mittelpunkt einer Kugel $k(M, \rho)$ ist, die die beiden Punkte $A = (2; -5; 11)$ und $B = (-4; -1; 7)$ enthält.

[Tipp: Beschreibe die Ebene s durch eine Punktrichtungsgleichung]

(c) Zeige, dass es sich bei der Ebene s um die Symmetrieebene (vergleiche Übung 16.6) der beiden Punkte A und B handelt.

Übung 24.5 (Verallgemeinerung von Übung 24.4)

(a) Zeige, dass der Mittelpunkt M jeder Kugel $k(M, \rho)$, die die beiden voneinander verschiedenen Raumpunkte A und B enthält, auf der Symmetrieebene von A und B liegt (vergleiche Übung 16.6).

(b) Zeige umgekehrt, dass jeder Punkt der Symmetrieebene von A und B Mittelpunkt einer Kugel $k(M, \rho)$ ist, die die beiden Punkte A und B enthält.

Übung 24.6

Berechne die Gleichungen der Kugeln $k(M, \rho)$, die die beiden Punkte $A = (8; -7; 1)$ und $B = (-2; -11; 3)$ enthalten und deren Mittelpunkte M auf der Geraden g liegen.

$$(a) \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Übung 24.7

Zeige, dass die Kugel $k(M, \rho)$ aus der Geraden g eine Sehne \overline{AB} ausschneidet. Ermittle die Koordinaten des Mittelpunktes L und die Länge σ dieser Sehne. Gib eine Gleichung der Zentralen z an, die die Sehne senkrecht schneidet.

$$(a) \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad k: \vec{X}^2 = 65$$

$$(b) \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad k: \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \right]^2 = 189$$

Übung 24.8

Ermittle die Gleichungen der Kugeln $k(M, \rho)$, deren Mittelpunkte M auf der Geraden g liegen und die die Gerade AB im Punkt A oder B berühren.

$$(a) \quad A = (-2; 8; 0) \quad B = (3; 0; -4) \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 24 \\ -21 \\ 38 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 17 \\ -16 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A = (3; -1; -1) \quad B = (1; 2; -3) \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Übung 24.9

Ermittle den Radius ρ der Kugel um den Mittelpunkt M , die die Gerade g berührt. Gib auch die Koordinaten des Berührungspunktes B an.

$$(a) \quad M = (0; 0; 0) \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (b) \quad M = (4; -1; 2) \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Übung 24.10

Ermittle den Radius ρ der Kugel um den Mittelpunkt M , die die Ebene e berührt. Gib auch die Koordinaten des Berührungspunktes B an.

$$(a) \quad M = (0; 0; 0) \quad e: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} + 42 = 0 \quad (b) \quad M = (3; 5; -2) \quad e: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} - 18 = 0$$

Übung 24.11

Zeige, dass die Gerade g eine Zentrale der Kugel $k(M, \rho)$ ist und ermittle die Gleichungen der Tangentialebenen t_A und t_B in den Durchstoßpunkten A und B der Zentralen. Gib auch die Koordinaten der Durchstoßpunkte an.

$$(a) \quad k: \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 = 54 \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad k: \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right]^2 = 224 \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ -14 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Übung 24.12

Gegeben sind die Kugel $k(M, \rho): \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix} \right]^2 = 13$ und der Pol $P = (14; 11; -16)$.

- Bestätige, dass der Pol außerhalb der Kugel liegt.
- Ermittle die Durchstoßpunkte A und B der Zentralen MP auf der Kugel k.
- Ermittle den Durchstoßpunkt L der Zentralen MP auf der Polarebene p.
- Bestätige die bereits aus der Teilaufgabe (a) resultierende Lagebeziehung von L bezüglich der Kugel.
- Gib die beschreibenden Daten des zum Pol P gehörenden Polarkreises an.

Übung 24.13

Gegeben sind die Kugel $k(M, \rho): \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^2 = 261$ und die Polarebene $p: \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} - 290 = 0$

- Berechne die Koordinaten des Lotfußpunktes L des Kugelmittelpunkts M auf der Polarebene p.
- Ermittle die Durchstoßpunkte A und B der Zentralen ML auf der Kugel k.
- Begründe die Gültigkeit der Beziehung $\vec{MP} \cdot \vec{ML} = \rho^2$ und verwende diese, um die Koordinaten des Pols P zu berechnen.
- Ermittle die Lage des Pols P bezüglich der Kugel k und beschreibe auf dieser Grundlage die Lagebeziehung zwischen Kugel und Polarebene.

Übung 24.14

Bezüglich einer Kugel k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $\rho = \sqrt{45}$ sind der Pol $P = (12; 4; -8)$ und die zu P gehörende Polarebene $p: \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} + 60 = 0$ gegeben. Ermittle die Gleichung der Kugel.

Übung 24.15

Gegeben die Kugel $k: \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 68$ und der Pol $P = \left(-\frac{13}{7}; -\frac{53}{7}; -\frac{75}{7} \right)$.

Zeige, dass P außerhalb der Kugel liegt und ermittle den Mittelpunkt, einen Normalenvektor und den Radius des Polarkreises, der zum Pol P gehört.

Übung 24.16

Gegeben ist eine Kugel $k(M, \rho)$ und eine Gerade g. Zeige, dass g eine Passante der Kugel ist und ermittle die Gleichung der Tangentialebenen der Kugel, die die Gerade g enthalten.

Hinweise:

- Ermittle den Lotfußpunkt P des Kugelmittelpunkts M auf der Passante g.
- Formuliere eine Gleichung der Polarebene p des Pols P bezüglich der Kugel $k(M, \rho)$ und ermittle die Gleichung der Schnittgeraden, die p und die Lotebene e von g durch den Kugelmittelpunkt M besitzen.
- Berechne die Durchstoßpunkte A und B der Geraden h auf der Kugel $k(M, \rho)$.
- Zeige, dass die Tangentialebenen zu den Berührungspunkten A und B die Passante g enthalten.

$$(a) \quad k: [\vec{X}]^2 = 30 \qquad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad k: \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^2 = 33 \qquad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Übung 24.17

Gegeben ist eine Kugel $k(M, \rho)$ und eine Gerade $g : \vec{X} = \vec{D} + \lambda \vec{u}$. Beweise:

- (a) Ist g eine Sekante der Kugel, so gibt es keine Tangentialebene der Kugel, die die Gerade enthält.
- (b) Ist g eine Tangente der Kugel, so gibt es genau eine Tangentialebene der Kugel, die die Gerade enthält.
- (c) Ist g eine Passante der Kugel, so gibt es genau zwei Tangentialebenen der Kugel, die die Gerade enthalten.

[Die Teilaufgabe (c) ist anspruchsvoll. Tipps: Rechenweg der Übung 24.16, Bemerkungen (17.13), (17.14)]

Übung 24.18 („Zwei-Kugel-Figur“ - Theorie)

Gegeben sind zwei Kugeln $k(M, \rho)$ und $k(N, \sigma)$ mit voneinander verschiedenen Mittelpunkten M und N sowie die „Trägerebene“ $e : 2 \vec{MN} \cdot \vec{X} - [(\vec{N}^2 - \sigma^2) - (\vec{M}^2 - \rho^2)] = 0$.

- (a) Beweise:
 - (1) Jeder gemeinsame Punkt der beiden Kugeln erfüllt die Gleichung der Trägerebene e .
 - (2) Jeder Punkt, der auf einer der beiden Kugeln und auf der Trägerebene liegt, liegt auch auf der anderen Kugel.
[Tipp für beide Sätze: Subtrahiere die Gleichungen voneinander!]
- (b) Begründe, dass die beiden Kugelmittelpunkte einen gemeinsamen Lotfußpunkt L auf der Trägerebene e besitzen, und zeige, dass dieser durch die Gleichung $\vec{L} = \vec{M} + \frac{\vec{MN}^2 + \rho^2 - \sigma^2}{2 \vec{MN}^2} \vec{MN}$ gegeben ist.
- (c) Begründe, dass für die drei Punkte M, N und L stets eine der beiden Gleichungen $\|\vec{MN}\| = \|\vec{ML}\| + \|\vec{LN}\|$ oder $\|\vec{MN}\| = |\|\vec{ML}\| - \|\vec{LN}\||$ gilt. Erläutere die Voraussetzungen, die zu den beiden verschiedenen Fällen führen.
[Tipp: Übung 14.8]
- (d) Begründe den folgenden Sachverhalt:
 - Ist der Abstand eines Kugelmittelpunktes zur Trägerebene e größer [kleiner; gleich] als der Kugelradius, so gilt das auch für die andere Kugel.
- (e) Zeige nun, dass die Trägerebene e genau dann eine Tangentialebene der beiden Kugeln ist, wenn $d(M, N) = |\rho - \sigma| \vee d(M, N) = \rho + \sigma$ gilt.
- (f) Es sei gewährleistet (Der Nachweis ist algebraisch anspruchsvoll!), dass die gemeinsamen Punkte der beiden Kugeln in der Trägerebene e einen (nicht nur aus einem Punkt bestehenden) Kreis bilden, wenn die Doppelrelation $|\rho - \sigma| < d(M, N) < \rho + \sigma$ erfüllt ist.

Zeige, dass der Radius ε dieses Kreises durch $\varepsilon^2 = \frac{4\rho^2\sigma^2 - (\vec{MN}^2 - (\rho^2 + \sigma^2))^2}{4 \vec{MN}^2}$ gegeben ist.

Übung 24.19 („Zwei-Kugel-Figur“ - Rechnung)

Gegeben sind zwei Kugeln $k(M, \rho)$ und $k(N, \sigma)$ und die „Trägerebene“ $e : 2 \vec{MN} \cdot \vec{X} - [(\vec{N}^2 - \sigma^2) - (\vec{M}^2 - \rho^2)] = 0$.

- Ermittle unter Verwendung der gegebenen Koordinaten von M und N sowie der Werte für ρ und σ die allgemeine Normalengleichung der Trägerebene e .
- Entscheide, ob die beiden Kugeln gemeinsame Punkte besitzen.
- Gib die Koordinaten des Berührungspunktes an, wenn die Kugeln sich in genau einem Punkt berühren.
- Gib den Mittelpunkt, einen Normalenvektor und den Radius ε des Kreises an, der durch die gemeinsamen Punkte der beiden Kugeln gebildet wird, wenn die beiden Kugeln mehr als einen gemeinsamen Punkt besitzen.

(a) $k(M, \rho) : \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right]^2 = 12$ $k(N, \sigma) : \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 18$

(b) $k(M, \rho) : \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ -13 \end{pmatrix} \right]^2 = 49$ $k(N, \sigma) : \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \right]^2 = 196$