Übung 24.1

(a) $A \in k \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}^2 = 29 \Leftrightarrow 29 = 29$. $A \in k$

$d(O,B)^2 = \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}^2 = 26$; B liegt im Innern der Kugel k.

$d(O,C)^2 = \begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}^2 = 30$; C liegt außerhalb der Kugel k.

(b) $M := (4; 1; -6)$; $\rho := \sqrt{66}$

$d(M,A)^2 = \begin{pmatrix}-12\\4\\7\end{pmatrix}^2 = 209 > \rho^2$; A liegt außerhalb der Kugel.

$d(M,B)^2 = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}^2 = 36 < \rho^2$; B liegt innerhalb der Kugel.

$d(M,C)^2 = \begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}^2 = 66 = \rho^2$; C liegt auf der Kugel.

Übung 24.2

(a) $\left[\begin{pmatrix}6\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-4\\-6\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\8\\8\end{pmatrix}\right]^2 = 179 \Leftrightarrow \left[\lambda\begin{pmatrix}-4\\-6\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\-7\\-9\end{pmatrix}\right]^2$

$\Leftrightarrow 116\lambda^2 - 116\lambda + 179 = 179 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1$

$\vec{A} := \begin{pmatrix}6\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{B} := \begin{pmatrix}6\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\-6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-5\\7\end{pmatrix}$ liefern die gemeinsamen Punkte.

(b) $\left[\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\14\end{pmatrix}\right]^2 = 75 \Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix}-1\\3\\-17\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}\right]^2 = 75$

$\Leftrightarrow 14\lambda^2 - 112\lambda + 299 = 75 \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)^2 = 0$

$\vec{B} := \begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\9\end{pmatrix}$ liefert den einzigen gemeinsamen Punkt.

(c) $\left[\begin{pmatrix}1\\-4\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}9\\0\\1\end{pmatrix}\right]^2 = 49 \Leftrightarrow \left[\lambda\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-8\\-4\\4\end{pmatrix}\right]^2 = 49$

$\Leftrightarrow 30\lambda^2 + 96 = 49 \Leftrightarrow 30\lambda^2 = -47$; Es gibt keine gemeinsamen Punkte.

Übung 24.3

(a) $\left[\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\t\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\3\\7\end{pmatrix}\right]^2=29 \Leftrightarrow \left[\lambda\begin{pmatrix}2\\t\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9\\-1\\-1\end{pmatrix}\right]^2=29$

$\Leftrightarrow (5+t^2)\lambda^2+(34-2t)\lambda+83=29$

Diskriminante: $(34-2t)^2-4\cdot(5+t^2)\cdot 54 = 1156-136t+4t^2-1080-216t^2$

$= 4t^2-136t-216t^2+76 = -212t^2-136t+76 =: \Delta$

$\Delta=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{136\pm 288}{-424} \Leftrightarrow t=-1 \vee t=\dfrac{19}{53}$

Für diese beiden Parameterwerte berührt die Gerade g_t die Kugel k in genau einem Punkt.

Für $t\in\left]-1;\frac{19}{53}\right[$ ist die Diskriminante Δ positiv; daher schneidet die Gerade g_t die Kugel k in zwei Punkten.

Für $t\in\mathbb{R}\setminus\left[-1;\frac{19}{53}\right]$ ist die Diskriminante Δ negativ; die Gerade g_t ist dann eine Passante der Kugel k.

$\begin{pmatrix}-5\\3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\t\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-9\\1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2\\t\\1\end{pmatrix}$ [nicht lösbar]

Es gibt also kein $t\in\mathbb{R}$, für das g_t eine Zentrale der Kugel k ist.

(b) $\left[\begin{pmatrix}-3\\t\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\3\\7\end{pmatrix}\right]^2=29 \Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix}2\\t-3\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right]^2=29$

$\Leftrightarrow 9\lambda^2+(4t-24)\lambda+(t^2-6t+29)=29$

$\Leftrightarrow 9\lambda^2+4(t-6)\lambda+t(t-6)=0$

Diskriminante: $16(t-6)^2-4\cdot 9\cdot t(t-6) = (t-6)(16t-96-36t)$

$= (t-6)(-20t-96) =: \Delta$

$\Delta=0 \Leftrightarrow t=6 \vee t=-\dfrac{24}{5}$

Für diese beiden Parameterwerte berührt die Gerade g_t die Kugel in genau einem Punkt.

Für $t \in]-\frac{24}{5}; 6[$ ist Δ positiv; also schneidet g_t die Kugel k in zwei Punkten.

Für $t \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{24}{5}; 6]$ ist g_t eine Passante der Kugel.

$$\begin{pmatrix}-5\\3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\t\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2\\3-t\\4\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \quad [\text{nicht lösbar}]$$

Keine der Geraden g_t, $t \in \mathbb{R}$, ist eine Zentrale der Kugel.

Übung 24.4

(a) Sei M der Mittelpunkt einer Kugel $k(M;\rho)$, die die beiden Punkte A und B enthält. Dann gilt:

$$d(M,A)^2 = \rho^2 = d(M,B)^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix}2\\-5\\11\end{pmatrix} - \vec{M}\right]^2 = \left[\begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix} - \vec{M}\right]^2$$

$$\Rightarrow 150 - 2\begin{pmatrix}2\\-5\\11\end{pmatrix}\cdot\vec{M} + \vec{M}^2 = 66 - 2\cdot\begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix}\cdot\vec{M} + \vec{M}^2$$

$$\Rightarrow 2\begin{pmatrix}-6\\4\\-4\end{pmatrix}\cdot\vec{M} + 84 = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix}\cdot\vec{M} + 21 = 0$$

Also liegt M auf der Ebene $s: \begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + 21 = 0$.

(b) $$s: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

zu zeigen ist: $d(X,A)^2 = d(X,B)^2 \quad \forall X \in s$

$$\vec{AX} = -\begin{pmatrix}2\\-5\\11\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\-11\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{BX} = -\begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\1\\-7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{AX}^2 = 171 + 2\cdot 25\lambda + 2\cdot(-12)\mu + 13\lambda^2 + 2\cdot 6\lambda\mu + 8\mu^2$$
$$\vec{BX}^2 = 171 + 2\cdot 25\lambda + 2\cdot(-12)\mu + 13\lambda^2 + 2\cdot 6\lambda\mu + 8\mu^2$$

Aus $\vec{AX}^2 = \vec{BX}^2$ folgt, dass X der Mittelpunkt einer Kugel ist, auf der A und B liegen.

(c) Gemäß Übung 16.6 wird die Symmetrieebene e_{AB} durch die Gleichung $2\,\vec{AB}\cdot\vec{x} - (\vec{B}^2 - \vec{A}^2) = 0$ beschrieben.

$$e_{AB}: 2\cdot\begin{pmatrix}-6\\4\\-4\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - (66-150) = 0 \iff \begin{pmatrix}-12\\8\\-8\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + 84 = 0$$

Die Gleichungen von e_{AB} und s sind äquivalent (Faktor: 4)

Aufgabe 24.5

(a) Ist M der Mittelpunkt einer Kugel $k(M,\rho)$, die die beiden Raumpunkte A und B enthält, dann gilt $d(A,M) = \rho = d(B,M)$. Gemäß Übung 16.6 (c) liegt M auf der Symmetrieebene e_{AB}.

(b) Gemäß Übung 16.6 (b) ist jeder Punkt M der Symmetrieebene e_{AB} gleich weit von A und B entfernt. Also gilt $d(A,M) = d(B,M) =: \rho$
Folglich gilt $A, B \in k(M,\rho)$.

Übung 24.5 ist nur eine alternative Formulierung der Übung 16.6.

Übung 24.6

(b) ~~(a)~~ Die Kugel $k(M;\rho)$ enthält A und B, falls $d(A,M) = d(B,M) = \rho$ gilt. $M \in g \iff \vec{M} = \begin{pmatrix}14\\6\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$d(A,M) = d(B,M) \iff \left[-\begin{pmatrix}8\\-7\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}14\\6\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}\right]^2 = \left[-\begin{pmatrix}-2\\-11\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}14\\6\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}\right]^2$$

$$\iff \left[\begin{pmatrix}6\\13\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}\right]^2 = \left[\begin{pmatrix}16\\17\\-5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}\right]^2$$

$$\iff 214 + 118\lambda + 30\lambda^2 = 570 + 238\lambda + 30\lambda^2$$

$$\iff -356 = 120\lambda \iff \lambda = -\frac{89}{30}$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix}14\\6\\-2\end{pmatrix} - \frac{89}{30}\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-25/30\\2/30\\29/30\end{pmatrix};\quad \rho^2 = \frac{115170}{30^2} \Rightarrow \rho = \frac{1}{30}\sqrt{115170}$$

$$k(M,\rho): \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-25/30\\2/30\\29/30\end{pmatrix}\right]^2 = \frac{115170}{900}$$

(a) $M \in g \iff \vec{M} = \begin{pmatrix}-1\\4\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$d(A,M) = d(B,M) \iff \left[-\begin{pmatrix}8\\-7\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\4\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}\right]^2 = \left[-\begin{pmatrix}-2\\-11\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\4\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}\right]^2$$

$$\iff \left[\begin{pmatrix}-9\\11\\-5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}\right]^2 = \left[\begin{pmatrix}1\\15\\-7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}\right]^2$$

$$\iff 227 + 2\cdot 51\lambda + 21\lambda^2 = 275 + 2\cdot 57\lambda + 21\lambda^2$$

$$\iff -12\lambda = 48 \iff \lambda = -4$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix}-1\\4\\-4\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-4\\12\end{pmatrix} \; ; \; \rho^2 = \left[\begin{pmatrix}-9\\11\\-5\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix}-5\\3\\11\end{pmatrix}^2 = 155$$

$$k(M;\rho) : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\-4\\12\end{pmatrix}\right]^2 = 155$$

Aufgabe 24.7

(a) $\left[\begin{pmatrix}-13\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\right]^2 = 65 \iff 185 + 2\cdot 47\lambda + 14\lambda^2 = 65$

$$\iff 14\lambda^2 + 94\lambda + 120 = 0$$

$$\iff \lambda = \frac{-94 \pm \sqrt{2116}}{28} \iff \lambda = -5 \vee \lambda = -\frac{12}{7}$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix}-13\\0\\4\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-5\\-6\end{pmatrix} \; ; \; \vec{B} = \begin{pmatrix}-13\\0\\4\end{pmatrix} - \frac{12}{7}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-55/7\\-12/7\\4/7\end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) = \begin{pmatrix}-41/14\\-47/14\\-38/14\end{pmatrix} \; ; \; \sigma = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\|\begin{pmatrix}-69/7\\23/7\\46/7\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{7}\sqrt{7406}$$

$\vec{L}$ ist ein Richtungsvektor von z und daher auch $-14\cdot\vec{L}$.

$$z : \vec{x} = \mu\begin{pmatrix}41\\47\\38\end{pmatrix}$$

(b) $\left[\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-7\\-6\end{pmatrix}\right]^2 = 189 \iff \left[\begin{pmatrix}-5\\8\\10\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}+2\\-2\\-1\end{pmatrix}\right]^2 = 189$

$\iff 189 + 2\cdot(-36)\lambda + 9\lambda^2 = 189$

$\iff 9\lambda^2 - 72\lambda = 0 \iff \lambda = 0 \;\vee\; \lambda = 8$

$\vec{A} = \begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$; $\vec{B} = \begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix} + 8\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\-15\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{L} = \frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}10\\-14\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-7\\0\end{pmatrix}$; $r = \left\|\begin{pmatrix}16\\-16\\-8\end{pmatrix}\right\| = 24$

$ML : \vec{x} = \begin{pmatrix} \\-7\\-6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}$

Übung 24.8

(a) Die Kugel $k(M, \varrho)$ berührt die Gerade AB im Punkt A, falls die Zentrale MA auf der Geraden AB senkrecht steht und als Radius $\varrho = d(M, A)$ gewählt wird.

$\vec{M} = \begin{pmatrix}24\\-21\\38\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}17\\-16\\27\end{pmatrix}$; $\vec{MA} = -\begin{pmatrix}24\\-21\\38\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}17\\-16\\27\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$; $\vec{AB} = \begin{pmatrix}5\\-8\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{MA}\cdot\vec{AB} = 0 \iff \left[\begin{pmatrix}-26\\29\\-38\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-17\\16\\-27\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}5\\-8\\-4\end{pmatrix} = 0$

$\iff -210 - 105\lambda = 0 \iff \lambda = -2$

$\vec{M} = \begin{pmatrix}24\\-21\\38\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}17\\-16\\27\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\11\\-16\end{pmatrix}$; $\varrho^2 = \begin{pmatrix}8\\-3\\16\end{pmatrix}^2 = 329$; $k(M,\varrho) : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-10\\11\\-16\end{pmatrix}\right]^2 = 329$

berührt AB im Punkt A.

$\vec{MB}\cdot\vec{AB} = 0 \iff \left[\begin{pmatrix}-21\\21\\-42\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-17\\16\\-27\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}5\\-8\\-4\end{pmatrix} = 0$

$\iff -105 - 105\lambda = 0 \iff \lambda = -1$

$\vec{M} = \begin{pmatrix}24\\-21\\38\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}17\\-16\\27\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-5\\11\end{pmatrix}$; $\varrho^2 = \begin{pmatrix}-4\\5\\-15\end{pmatrix}^2 = 266$; $k(M,\varrho) : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}7\\-5\\11\end{pmatrix}\right]^2 = 266$

berührt AB im Punkt B.

(b) $\vec{M} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\11\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{MA} = -\begin{pmatrix}-6\\-3\\11\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{AB} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$

$$\vec{MA}\cdot\vec{AB} = 0 \iff \left[\begin{pmatrix}9\\2\\-12\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix} = 0$$

$$\iff 12 + 6\lambda = 0 \iff \lambda = -2$$

$\vec{M} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\11\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\1\\17\end{pmatrix}$; $\rho^2 = \begin{pmatrix}15\\-2\\-18\end{pmatrix}^2 = 553$; $k(M,\rho): \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}15\\-2\\-18\end{pmatrix}\right]^2 = 553$

berührt AB im Punkt A.

$$\vec{MB} = -\begin{pmatrix}-6\\-3\\11\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$$\vec{MB}\cdot\vec{AB} = 0 \iff \left[\begin{pmatrix}7\\5\\-14\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix} = 0$$

$$\iff 29 + 6\lambda = 0 \iff \lambda = -\frac{29}{6}$$

$\vec{M} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\11\end{pmatrix} - \frac{29}{6}\begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-123/6\\40/6\\153/6\end{pmatrix}$; $\rho^2 = \begin{pmatrix}129/6\\-28/6\\-171/6\end{pmatrix}^2 = \frac{1}{6}\sqrt{46666}$

$k(M,\rho): \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}129/6\\-28/6\\-171/6\end{pmatrix}\right]^2 = \frac{1}{6}\sqrt{46666}$ berührt AB im Punkt B.

Übung 24.9

(a) Die Kugel $k(M,\rho)$ berührt die Gerade g in einem Punkt B, falls $\vec{MB}$ orthogonal zum Richtungsvektor von g ist und $\rho = d(M,B)$ gilt.

$\vec{MB} = -\vec{M} + \vec{B} = \begin{pmatrix}9\\6\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\vec{MB}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \iff \left[\begin{pmatrix}9\\6\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \iff 12 + 3\lambda = 0 \iff \lambda = -4$$

$\vec{B} = \begin{pmatrix}9\\6\\-3\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\-7\end{pmatrix}$; $\rho = \left\|\begin{pmatrix}5\\2\\-7\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{78}$

(b) $\overrightarrow{MB} = -\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\\-11\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\\-13\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = 0 \iff \left[\begin{pmatrix}-1\\5\\-13\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = 0$$

$$\iff 25 + 5\lambda = 0 \iff \lambda = -5$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix}3\\4\\-11\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}; \quad \rho = \left\|\begin{pmatrix}-6\\5\\-3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{70}$$

__Übung 24.10__

(a) Die Kugel $k(M,\rho)$ berührt die Ebene e im Lotfußpunkt von M auf e.

Das Lot von M auf e hat die Gleichung $l: \vec{x} = \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} \cdot \left[\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\right] + 42 = 0 \iff 21\lambda + 42 = 0 \iff \lambda = -2$$

$$\vec{B} = -2\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\-8\end{pmatrix}; \quad \rho = \|\vec{B}\| = \sqrt{84}$$

(b) Lot von M auf e: $l: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right] + 42 = 0 \iff -6 + 6\lambda + 42 = 0 \iff \lambda = -6$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\11\\-14\end{pmatrix}; \quad \rho = \|\overrightarrow{MB}\| = \left\|\begin{pmatrix}-6\\6\\-12\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{216}$$

__Übung 24.11__

(a) $\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\8\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}-4\\4\\-8\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \iff \lambda = -4$

Da $M \in g$ gilt, ist g eine Zentrale der Kugel $k(M,\rho)$.

$$\left[\begin{pmatrix}3\\-1\\8\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}\right]^2=54 \iff \left[\begin{pmatrix}4\\-4\\8\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right]^2=54$$

$$\iff 96+2\cdot 24\lambda+6\lambda^2=54$$

$$\iff 6\lambda^2+48\lambda+42=0$$

$$\iff \lambda^2+8\lambda+7=0 \iff (\lambda+1)(\lambda+7)=0 \iff \lambda=-1 \lor \lambda=-7$$

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}3\\-1\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix};\quad \vec{B}=\begin{pmatrix}3\\-1\\8\end{pmatrix}-7\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\6\\-6\end{pmatrix}$$

$$t_A:\ \overrightarrow{MA}\cdot\vec{x}-\overrightarrow{MA}\cdot\vec{A}=0 \iff \begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}=0 \iff \begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-42=0$$

$$t_B:\ \overrightarrow{MB}\cdot\vec{x}-\overrightarrow{MB}\cdot\vec{B}=0 \iff \begin{pmatrix}-3\\3\\-6\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-\begin{pmatrix}-3\\3\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\6\\-6\end{pmatrix}=0 \iff \begin{pmatrix}-3\\3\\-6\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-66=0$$

(b) $$\begin{pmatrix}7\\-2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\13\\-14\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}-5\\-15\\10\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} \iff \lambda=-5$$

g ist eine Zentrale der Kugel $k(M,\rho)$, weil M auf g liegt.

$$\left[\begin{pmatrix}12\\13\\-14\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\-2\\-4\end{pmatrix}\right]^2=224 \iff \left[\begin{pmatrix}5\\15\\-10\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right]^2=224$$

$$\iff 350+2\cdot 70\lambda+14\lambda^2=224$$

$$\iff 14\lambda^2+140\lambda+126=0$$

$$\iff \lambda^2+10\lambda+9=0 \iff (\lambda+1)(\lambda+9)=0 \iff \lambda=-1 \lor \lambda=-9$$

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}12\\13\\-14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\10\\-12\end{pmatrix};\quad \vec{B}=\begin{pmatrix}12\\13\\-14\end{pmatrix}-9\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-14\\4\end{pmatrix}$$

$$t_A:\ \begin{pmatrix}4\\12\\-8\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\12\\-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11\\10\\-12\end{pmatrix}=0 \iff \begin{pmatrix}4\\12\\-8\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-260=0$$

$$t_B:\ \begin{pmatrix}-4\\-12\\8\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-\begin{pmatrix}-4\\-12\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-14\\4\end{pmatrix}=0 \iff \begin{pmatrix}-4\\-12\\8\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-188=0$$

Übung 24.12

(a) $d(M,P)^2 = \begin{pmatrix}6\\0\\-9\end{pmatrix}^2 = 117 > \rho^2$; der Pol liegt außerhalb der Kugel.

(b) $MP: \vec{x} = \vec{M} + \lambda \overrightarrow{MP} \iff \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\11\\-7\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}6\\0\\-9\end{pmatrix}$

Wir berechnen die Durchstoßpunkte von MP auf $k(M,\rho)$:

$$\left[\begin{pmatrix}8\\11\\-7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\0\\-9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\-9\end{pmatrix}\right]^2 = 13 \iff 117\lambda^2 = 13 \iff \lambda^2 = \frac{1}{9} \iff \lambda = \frac{1}{3} \vee \lambda = -\frac{1}{3}$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix}8\\11\\-7\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\0\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\11\\-10\end{pmatrix} \ ; \ \vec{B} = \begin{pmatrix}8\\11\\-7\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\0\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\11\\-4\end{pmatrix}$$

(c) Polarebene $p: \begin{pmatrix}6\\0\\-9\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - \begin{pmatrix}6\\0\\-9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\11\\-7\end{pmatrix} = 13 \iff \begin{pmatrix}6\\0\\-9\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - 124 = 0$

Wir berechnen den Durchstoßpunkt von MP in p:

$$\begin{pmatrix}6\\0\\-9\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}8\\11\\-7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\0\\-9\end{pmatrix}\right] - 124 = 0 \iff 111 + 117\lambda - 124 = 0$$

$$\iff 117\lambda = 13 \iff \lambda = \frac{1}{9}$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix}8\\11\\-7\end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix}6\\0\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}26/3\\11\\-8\end{pmatrix}$$

(d) Da der Pol außerhalb der Kugel liegt, müsste L ein Punkt des Kugelinneren sein:

$d(M,L)^2 = \begin{pmatrix}2/3\\0\\-1\end{pmatrix}^2 = \frac{4}{9} + 1 = \frac{13}{9} < \rho^2 = 13$; L ist ein innerer Punkt!

(e) Der Polarkreis besitzt den Mittelpunkt L, den Normalenvektor $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}6\\0\\-9\end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{ML} = \begin{pmatrix}2/3\\0\\-1\end{pmatrix}$ und den Radius σ mit

$$\sigma^2 = \rho^2 - \overrightarrow{ML}^2 = 13 - \frac{13}{9} = \frac{104}{9} \ ; \ \sigma = \frac{2}{3}\sqrt{26}$$

Übung 24.13

(a) Das Lot von M auf p ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Wir berechnen den Lotfußpunkt L von M auf ~~g~~ p:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right] - 290 = 0 \iff 29 + 29\lambda - 290 = 0$$

$$\iff \lambda = 9.$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -42 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Anmerkung: $g = ML$!

(b) $$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 261 \iff 29\lambda^2 = 261 \iff \lambda^2 = 9$$

$$\iff \lambda = -3 \lor \lambda = 3$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(c) Die Polarebene p besitzt die Gleichung $\overrightarrow{MP} \cdot \vec{x} - \overrightarrow{MP} \cdot \vec{M} = \rho^2$

Da $L \in p$ folgt: $\overrightarrow{MP} \cdot \vec{L} - \overrightarrow{MP} \cdot \vec{M} = \rho^2$

$$\iff \overrightarrow{MP} \cdot (-\vec{M} + \vec{L}) = \rho^2$$

$$\iff \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{ML} = \rho^2$$ Das war zu zeigen.

Weiterhin folgt: $\iff (-\vec{M} + \vec{P}) \cdot \overrightarrow{ML} = \rho^2$

$$\iff \overrightarrow{ML} \cdot \vec{P} - \overrightarrow{ML} \cdot \vec{M} = \rho^2 \quad (1)$$

Andererseits ist der Pol P ein Punkt der Geraden $g = ML$.

Das bedeutet: $\vec{P} = \vec{M} + \mu \overrightarrow{ML}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ (2)

Aus (1) und (2) ergibt sich der Berechnungsansatz für P:

$$\overrightarrow{ML} \cdot (\vec{M} + \mu \overrightarrow{ML}) - \overrightarrow{ML} \cdot \vec{M} = \rho^2 \iff \mu \overrightarrow{ML}^2 = \rho^2$$

$$\iff \mu = \frac{\rho^2}{\overrightarrow{ML}^2}$$

Also ergibt sich $\mu = \dfrac{261}{81 \cdot 29} = \dfrac{9}{81} = \dfrac{1}{9}$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \cdot 9 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P = (6; -10; 0).$$

(d) $d(M,P) = \| \overrightarrow{MP} \| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{29} < \rho = \sqrt{261}$

Der Pol P liegt im Innern der Kugel $k(M,\rho)$; daher passiert die Polarebene p die Kugel außerhalb.

Übung 24.14

Der Mittelpunkt M der Kugel k liegt auf der Geraden PL, wobei L der Lotfußpunkt des Pols P auf der Polarebene p sei. Wir ermitteln daher zunächst L.

$$PL: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad p: \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 60 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} \right] + 60 = 0 \iff 264 + 324\lambda + 60 = 0$$

$$\iff \lambda = -1$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Die Polarebene p besitzt die Gleichung $\overrightarrow{MP} \cdot \vec{x} - \overrightarrow{MP} \cdot \vec{P} = \rho^2$.

Da $L \in p$, folgt: $\overrightarrow{MP} \cdot \vec{L} - \overrightarrow{MP} \cdot \vec{P} = \rho^2 \iff \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{ML} = \rho^2$

Weiterhin ist M ein Punkt der Geraden PL. Also gibt es $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{M} = \vec{P} + \mu \overrightarrow{PL}$.

Damit folgt: $\left(-(\vec{P} + \mu \overrightarrow{PL}) + \vec{P}\right) \cdot \left(-(\vec{P} + \mu \overrightarrow{PL}) + \vec{L}\right) = \rho^2$

$$\iff \left(-\mu \overrightarrow{PL}\right) \cdot \left((1+\mu)\overrightarrow{PL}\right) = \rho^2$$

$$\iff -\mu(1+\mu)\overrightarrow{PL}^2 = \rho^2$$

$$\iff -\mu - \mu^2 = \frac{\rho^2}{\overrightarrow{PL}^2} \iff \mu^2 + \mu + \frac{\rho^2}{\overrightarrow{PL}^2} = 0$$

Mit $\rho^2 = 45$ und $\overrightarrow{PL}^2 = 324$ erhalten wir die Gleichung

$$\mu^2 + \mu + \frac{45}{324} = 0 \iff \mu = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{45}{324}}}{2} \iff \mu = \frac{-1 \pm \frac{2}{3}}{2}$$

$$\iff \mu = -\frac{5}{6} \lor \mu = -\frac{1}{6}$$

$$\vec{M_1} := \vec{P} - \frac{5}{6}\vec{PL} = \begin{pmatrix}12\\4\\-8\end{pmatrix} - \frac{5}{6}\begin{pmatrix}-12\\-6\\+12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\4\\-8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}10\\5\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}22\\9\\-18\end{pmatrix}$$

$$\vec{M_2} := \vec{P} - \frac{1}{6}\vec{PL} = \begin{pmatrix}12\\4\\-8\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-12\\-6\\+12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\4\\-8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\5\\-10\end{pmatrix}$$

$$k(M_1,\rho): \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}22\\9\\-18\end{pmatrix}\right]^2 = 45 \qquad k(M_2,\rho): \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}14\\5\\-10\end{pmatrix}\right]^2 = 45$$

Übung 24.15

$$\vec{P} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix}13\\53\\75\end{pmatrix}; \quad \vec{MP} = -\begin{pmatrix}3\\7\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix}13\\53\\75\end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix}21\\49\\-7\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix}13\\53\\75\end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix}34\\102\\68\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{34}{7}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}; \quad \vec{MP}^2 = \frac{34^2}{49}\cdot 14 = \frac{34^2}{7}\cdot 2 = \frac{2}{7}\cdot 34^2$$

$$\vec{L} = \vec{M} + \frac{\rho^2}{\vec{MP}^2}\vec{MP} = \begin{pmatrix}3\\7\\-1\end{pmatrix} + \frac{68}{\frac{2}{7}\cdot 34^2}\left(-\frac{34}{7}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\7\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}$$

Normalenvektor: $\vec{ML} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\-2\end{pmatrix}$

Radius σ: $\sigma^2 = 68\cdot\left(1 - \frac{68}{\frac{2}{7}\cdot 34^2}\right) = 68\cdot\left(1 - \frac{7}{34}\right) = 68\cdot\frac{27}{34} = 54$

Polarkreis: $r\left((2;4;3);\begin{pmatrix}-1\\-3\\-2\end{pmatrix};\sqrt{54}\right)$

Übung 24.16

(a) Wir untersuchen g und k auf gemeinsame Punkte:

$$\left[\begin{pmatrix}2\\11\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right]^2 = 30 \iff 129 + 2\cdot 18\lambda + 6\lambda^2 = 30$$

$$\iff 6\lambda^2 + 36\lambda + 99 = 0$$

Diskriminante: $36^2 - 4\cdot 6\cdot 99 = -1080$

g und k haben keine gemeinsamen Punkte; g ist eine Passante der Kugel.

Die Lotebene e von g durch den Kugelmittelpunkt besitzt die Gleichung $e: \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{o} = 0$

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}2\\11\\-2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right] = 0 \iff 18 + 6\lambda = 0 \iff \lambda = -3$$

Lotfußpunkt von M auf g: $\vec{P} = \begin{pmatrix}2\\11\\-2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\-5\end{pmatrix}$

Polarebene: $p: \vec{MP}\cdot\vec{x} - \vec{MP}\cdot\vec{M} = \rho^2 \iff \begin{pmatrix}5\\5\\-5\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - 0 = 30$

Für die Berechnung der Schnittgeraden von p und e formulieren wir für e eine Punktrichtungsgleichung:

$$e: \vec{x} = \vec{o} + \alpha\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5\\5\\-5\end{pmatrix}\cdot\left[\alpha\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}\right] = 30 \iff 15\alpha - 15\beta = 30 \iff \alpha = \beta + 2$$

$$h: \vec{x} = (\beta+2)\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} \iff \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Durchstoßpunkte von h auf der Kugel:

$$\left[\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right]^2 = 30 \iff 20 + 2\cdot 8\beta + 8\beta^2 = 30$$

$$\iff 8\beta^2 + 16\beta - 10 = 0$$

$$\iff \beta = \frac{-16 \pm \sqrt{256+320}}{16}$$

$$\iff \beta = -\frac{5}{2} \lor \beta = \frac{1}{2}$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{B} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$t_A: \begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - 30 = 0 \quad ; \quad t_B: \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - 30 = 0$$

Wir verifizieren, dass die beiden Tangentialebenen die Passante g enthalten.

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\11\\-2\end{pmatrix}-30=0 \iff 30-30=0$$; der Stützpunkt von g liegt auf t_A.

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=1+4-5=0$$; der Richtungsvektor von g ist orthogonal zum Normalenvektor von t_A. $g\subset t_A$!

$$\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\11\\-2\end{pmatrix}-30=0 \iff 30-30=0\;;\;\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=-5+4+1=0.\quad g\subset t_B!$$

(b) $$e:\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}=0 \iff \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-5=0$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-5\\2\\-7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right]-5=0 \iff -7+2\lambda-5=0 \iff \lambda=6$$

$$\vec{P}=\begin{pmatrix}-5\\2\\-7\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\-7\end{pmatrix}$$

$$p:\vec{MP}\cdot\vec{x}-\vec{MP}\cdot\vec{M}=\rho^2 \iff \begin{pmatrix}-3\\-3\\-9\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-\begin{pmatrix}-3\\-3\\-9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}=33 \iff \begin{pmatrix}-3\\-3\\-9\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-6=0$$

Die Schnittgerade von e und p berechnen wir mit Hilfe einer Punktrichtungsgleichung von e: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-3\\-3\\-9\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]-6=0 \iff -27-6\alpha+(-9)\beta-6=0$$

$$\iff -6\alpha-9\beta-33=0$$

$$\iff \alpha=-\frac{3}{2}\beta-\frac{11}{2}$$

$$l:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{11}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff \vec{x}=\begin{pmatrix}-3/2\\-13/2\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-3/2\\-3/2\\1\end{pmatrix}$$; mit $\beta=-1$ erhalten wir als alternativen Stützpunkt $\vec{T}=\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \left(\text{mit } \mu = \frac{1}{2}\beta \right)$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^2 = 33 \Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^2 = 33$$

$$\Leftrightarrow 33 + 2 \cdot \mu \cdot 22 + 22\mu^2 = 33 \Leftrightarrow 22\mu^2 + 44\mu = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 + 2\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 0 \vee \mu = -2$$

$$\vec{A} = \vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$t_A : \vec{MA} \cdot \vec{x} - \vec{MA} \cdot \vec{A} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 19 = 0$$

$$t_B : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 29 = 0$$

Wir prüfen, ob die Tangentialebenen die Passante enthalten.

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} - 19 = 19 - 19 = 0 ; \quad \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 + 4 + 0 = 0 ; \quad g \subset t_A$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} - 29 = 29 - 29 = 0 ; \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 + 0 = 0 ; \quad g \subset t_B$$

Übung 24.17

(a) Ist g eine Sekante der Kugel, so haben g und k zwei verschiedene gemeinsame Punkte A und B.

Ist nun t eine Ebene, die g enthält, so enthält t auch die Kugelpunkte A und B. Also kann t keine Tangentialebene sein, weil Tangentialebenen mit der Kugel nur einen gemeinsamen Punkt besitzen. Das bedeutet aber, dass es keine Tangentialebene der Kugel gibt, die die Sekante g enthält.

(b) Ist g eine Tangente der Kugel, so haben g und k genau einen Punkt B gemeinsam.
Sei t die Tangentialebene der Kugel mit dem Berührpunkt B.
Da g und t den gemeinsamen Punkt B besitzen, kann g nicht parallel zu t verlaufen.
$\overrightarrow{MB}$ ist ein Normalenvektor von t.
$\overrightarrow{MB}$ ist aber auch ein Richtungsvektor der Zentralen z, die g in B senkrecht schneidet; also ist $\overrightarrow{MB}$ orthogonal zum Richtungsvektor von g und daher $g \subset t$. (→ Analyse-Raster)
Wir müssen noch zeigen, dass es neben t keine weitere Tangentialebene der Kugel gibt, die g enthält.
Ist s irgendeine Tangentialebene, die g enthält, muss diese Tangentialebene den Kugelpunkt B enthalten. Durch den Kugelpunkt B verläuft aber nur genau eine Tangentialebene, nämlich t. Also ist zwangsläufig $s = t$.

(c) Sei g eine Passante der Kugel $k(M,\rho)$; dann gilt $g \cap k(M,\rho) = \emptyset$.
Sei e die Lotebene von g, die durch den Kugelmittelpunkt M verläuft. Der Schnittpunkt von e und g ist der Lotfußpunkt von M auf g. Er werde mit L bezeichnet.
Die Ebene e enthält also die voneinander verschiedenen Punkte M und L und besitzt den Normalenvektor $\vec{u}$, den Richtungsvektor von g.
Sei nun p die Polarebene des Pols L bezüglich der Kugel $k(M,\rho)$.
Der Vektor $\overrightarrow{ML}$ ist ein Normalenvektor von p und ein Richtungsvektor von e. Also stehen die Ebenen e und p senkrecht aufeinander. Ihre Schnittgerade bezeichnen wir mit h.
Weil L ein äußerer Pol der Kugel ist, liegt der Lotfußpunkt Z

des Kugelmittelpunkts auf der Polarebene innerhalb der Kugel.
Da Z auf der Geraden ML liegt, ist er nicht nur ein Punkt von p, sondern auch der Ebene e. Also ist Z ein Punkt der Schnittgeraden h. Da zu h ein Punkt gehört, der innerhalb der Kugel liegt, muss h eine Sekante der Kugel sein.
A und B seien die beiden Durchstoßpunkte von h auf der Kugel. Weil h innerhalb der Polarebene p verläuft, sind A und B Kugelpunkte, deren Tangentialebenen ~~dich~~ t_A und t_B den Pol L als Punkt enthalten.
Die beiden Ebenen t_A und t_B können nicht identisch sein, weil A und B zwei verschiedene Kugelpunkte sind (h ist eine Sekante!), Tangentialebenen aber immer nur genau einen Kugelpunkt enthalten.
Als Punkte von h sind A und B auch Punkte der Ebene e.
Das bedeutet, dass sowohl $e = KLA$ als auch $e = KLB$ gilt.
Die Vektoren $\overrightarrow{KA}$ und $\overrightarrow{KB}$ sind also einerseits Richtungsvektoren von e, andererseits Normalenvektoren von t_A bzw. t_B.
Folglich stehen die Tangentialebenen t_A und t_B senkrecht auf der Ebene e.
Nun ist aber der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Passante g ein Normalenvektor der Ebene e. Also ist $\vec{u}$ ein Richtungsvektor von t_A und von t_B.
Also enthalten die Tangentialebenen t_A und t_B nicht nur den Geradenpunkt L, sondern die gesamte Passante g.
Ist nun t eine weitere Tangentialebene, die die Passante g enthält, so ist $\vec{u}$ ein Richtungsvektor von t. Ist C der zu t gehörende Berührpunkt, so ist die Ebene KLC senkrecht zu t und besitzt daher den Normalenvektor $\vec{u}$. Deswegen muss KLC mit der Ebene e übereinstimmen und C einer der Punkte A oder B sein. Also gilt $t = t_A$ oder $t = t_B$.

Übung 24.18

(a) zu (1): $X \in k(M,\varrho) \wedge X \in k(N,\sigma)$

$$\Rightarrow (\vec{X}-\vec{M})^2=\varrho^2 \wedge (\vec{X}-\vec{N})^2=\sigma^2$$

$$\Rightarrow \vec{X}^2 - 2\vec{X}\cdot\vec{M} + \vec{M}^2 = \varrho^2 \wedge \vec{X}^2 - 2\vec{X}\cdot\vec{N}+\vec{N}^2=\sigma^2$$

[Subtraktion] $\Rightarrow -2\vec{X}\cdot\vec{M} + 2\vec{X}\cdot\vec{N} + \vec{M}^2 - \vec{N}^2 = \varrho^2-\sigma^2$

$$\Rightarrow 2\vec{X}\cdot(-\vec{M}+\vec{N}) + \vec{M}^2 - \varrho^2 - \vec{N}^2 + \sigma^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}\cdot\vec{X} - \left[(\vec{N}^2-\sigma^2)-(\vec{M}^2-\varrho^2)\right] = 0$$ (Gleichung von e)

zu (2): $X\in k(M,\varrho) \wedge X \in e$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}\cdot\vec{X} - \left[(\vec{N}^2-\sigma^2)-(\vec{M}^2-\varrho^2)\right]=0 \wedge (\vec{X}-\vec{M})^2=\varrho^2$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}\cdot\vec{X} - \vec{N}^2+\sigma^2+\vec{M}^2-\varrho^2=0 \wedge \vec{X}^2-2\vec{X}\cdot\vec{M}+\vec{M}^2-\varrho^2=0$$

[Subtraktion] $\Rightarrow \vec{X}^2 - 2\vec{X}\cdot\vec{M} - 2\overrightarrow{MN}\cdot\vec{X} + \vec{N}^2-\sigma^2=0$

$$\Rightarrow \vec{X}^2 - 2\vec{X}\cdot\vec{M} - 2(-\vec{M}\cdot\vec{X}+\vec{N}\cdot\vec{X})+\vec{N}^2-\sigma^2=0$$

$$\Rightarrow \vec{X}^2 - 2\vec{X}\cdot\vec{N}+\vec{N}^2-\sigma^2=0$$

$$\Rightarrow (\vec{X}-\vec{N})^2=\sigma^2 \quad \Rightarrow X\in k(N,\sigma)$$

(b) Da $\overrightarrow{MN}$ ein Normalenvektor der Trägerebene e ist, muss die Gerade MN ein Lot von e sein.
MN schneidet e in ihrem Lotfußpunkt L. L ist der Lotfußpunkt eines jeden Punktes von MN auf die Ebene e.
Das gilt insbesondere für die beiden Geradenpunkte M und N.
MN: $\vec{M} + \lambda\overrightarrow{MN}$; wir berechnen den Lotfußpunkt L:

$$2\overrightarrow{MN}\cdot(\vec{M}+\lambda\overrightarrow{MN}) - \left[(\vec{N}^2-\sigma^2)-(\vec{M}^2-\varrho^2)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}\cdot\vec{M} + 2\lambda\overrightarrow{MN}^2 - \vec{N}^2+\sigma^2+\vec{M}^2-\varrho^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda\overrightarrow{MN}^2 - 2\vec{M}^2 + 2\vec{M}\cdot\vec{N} - \vec{N}^2+\sigma^2+\vec{M}-\varrho^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda\overrightarrow{MN}^2 - (\vec{N}-\vec{M})^2+\sigma^2-\varrho^2=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\overrightarrow{MN}^2+\varrho^2-\sigma^2}{2\overrightarrow{MN}^2}$$

Es folgt: $\vec{L} = \vec{M} + \dfrac{\overrightarrow{MN}^2 + \varrho^2 - \sigma^2}{2\,\overrightarrow{MN}^2}\,\overrightarrow{MN}$

(c) M, N und L liegen auf der Geraden MN; sie sind daher drei kollineare Punkte.

Gelte $\overrightarrow{ML} = \lambda\,\overrightarrow{MN}$; dann folgt $\overrightarrow{LN} = \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} = -\lambda\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}$

$= (1-\lambda)\,\overrightarrow{MN}$

Ist $L \in \overline{MN}$, dann gilt $\lambda \in [0;1]$ und daher $1-\lambda \in [0;1]$

Gemäß Übung 14.8 folgt $\|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LN}\| = \|\lambda\overrightarrow{MN} + (1-\lambda)\overrightarrow{MN}\|$

$= \|\lambda\overrightarrow{MN}\| + \|(1-\lambda)\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{ML}\| + \|\overrightarrow{LN}\|$

Ist $L \notin \overline{MN}$, dann gilt $\lambda < 0$ oder $\lambda > 1$.

Ist $\lambda < 0$, so ist $1-\lambda > 0$. Ist $\lambda > 1$, so ist $1-\lambda < 0$

In beiden Fällen haben λ und $(1-\lambda)$ unterschiedliche Vorzeichen.

Gemäß Übung 14.8 folgt:

$\|\overrightarrow{MN}\| = \|\lambda\overrightarrow{MN} + (1-\lambda)\overrightarrow{MN}\| = \big|\,\|\lambda\overrightarrow{MN}\| - \|(1-\lambda)\overrightarrow{MN}\|\,\big|$

$= \big|\,\|\overrightarrow{ML}\| - \|\overrightarrow{LN}\|\,\big|$

Liegt L zwischen M und N, gilt die erste Gleichung, andernfalls die zweite.

(d) Der Abstand vom Kugelmittelpunkt M zur Trägerebene e ist gegeben durch $\|\overrightarrow{ML}\|$, der Abstand von N zu e durch $\|\overrightarrow{LN}\|$.
O.B.d.A gehen wir bei der Argumentation von der Kugel $k(M,\varrho)$ aus.
Ist $\|\overrightarrow{ML}\| > \varrho$, so haben $k(M,\varrho)$ und e keinen gemeinsamen Punkt, weil L der Punkt der Ebene e ist, der den kürzesten Abstand zu M hat. Ist L ein äußerer Punkt von $k(M,\varrho)$ so erst recht alle anderen Ebenenpunkte. Aus Teilaufgabe (a) folgt, dass $K(N,\sigma)$ auch keinen gemeinsamen Punkt mit

der Ebene e haben kann. Gäbe es einen gemeinsamen Punkt P, so müsste P auch ein Punkt von $k(M,\rho)$ sein. Also gilt $\|\overrightarrow{LN}\| > \sigma$

Ist $\|\overrightarrow{ML}\| < \rho$, so schneiden sich $k(M,\rho)$ und e in einem Kreis. Jeder Kreispunkt ist nach Teilaufgabe (a) auch ein Punkt von $k(N,\sigma)$. Folglich gilt $\|\overrightarrow{LN}\| < \sigma$.

Ist schließlich $\|\overrightarrow{ML}\| = \rho$, so ist L ein Punkt der Kugel $k(M,\rho)$. Da alle anderen Kugelpunkte einen größeren Abstand zur Trägerebene haben, ist der Punkt L der einzige gemeinsame Punkt von $k(M,\rho)$ und e. Gemäß Teilaufgabe (a) muss L auch ein gemeinsamer Punkt von $k(N,\sigma)$ und e sein, das heißt, $\|\overrightarrow{LN}\| = \sigma$

Wiederum ist es der einzige gemeinsame Punkt aufgrund der Lotfußpunkteigenschaft von L. Also ist die Ebene e eine gemeinsame Tangentialebene der Kugeln $k(M,\rho)$ und $k(N,\sigma)$, falls $\|\overrightarrow{ML}\| = \rho$ bzw. $\|\overrightarrow{LN}\| = \sigma$ gilt.

(e) „$\Rightarrow$"

Wenn die Ebene e eine Tangentialebene der beiden Kugeln ist, dann muss $\|\overrightarrow{ML}\| = \rho$ und $\|\overrightarrow{LN}\| = \sigma$ gelten.

Aus Teilaufgabe (c) folgt $\|\overrightarrow{MN}\| = \rho + \sigma \vee \|\overrightarrow{MN}\| = |\rho - \sigma|$.

„$\Leftarrow$"

Gelte $\|\overrightarrow{MN}\| = \rho + \sigma$. Sei $Z \in MN$ definiert durch $\vec{z} := \vec{M} + \frac{\rho}{\rho+\sigma}\overrightarrow{MN}$.

Dann folgt $\overrightarrow{MZ} = \frac{\rho}{\rho+\sigma}\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{ZN} = \overrightarrow{ZM} + \overrightarrow{MN} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho+\sigma}\right)\overrightarrow{MN}$

$$\|\overrightarrow{MZ}\| = \frac{\rho}{\rho+\sigma}\|\overrightarrow{MN}\| = \rho \quad ; \quad \|\overrightarrow{ZN}\| = \frac{\sigma}{\rho+\sigma}\|\overrightarrow{MN}\| = \sigma$$

Z ist also ein gemeinsamer Punkt von $k(M,\rho)$ und $k(N,\sigma)$.

Also liegt Z auf der Trägerebene e. Diese ist eine Tangentialebene für beide Kugeln im Punkt Z, weil $Z \in MN$ und $\overrightarrow{MN}$ ein Normalenvektor von e ist. Also stimmt Z mit L überein.

Gelte nun $\|\overrightarrow{MN}\| = |\rho-\sigma|$.

Gehen wir o.B.d.A davon aus, dass $\rho \geq \sigma$ gilt, so dürfen wir $\|\overrightarrow{MN}\| = \rho - \sigma$ schreiben.

Wir definieren $Z \in MN$ durch $\vec{Z} := \vec{M} + \frac{\rho}{\rho-\sigma}\overrightarrow{MN}$.

Es folgt $\overrightarrow{MZ} = \frac{\rho}{\rho-\sigma}\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{ZN} = \left(1-\frac{\rho}{\rho-\sigma}\right)\overrightarrow{MN}$.

$$\|\overrightarrow{MZ}\| = \frac{\rho}{\rho-\sigma}\|\overrightarrow{MN}\| = \rho \; ; \; \|\overrightarrow{ZN}\| = \left(\frac{\rho}{\rho-\sigma}-1\right)\|\overrightarrow{MN}\| = \sigma$$

Auch in diesem Fall erweist sich Z als gemeinsamer Punkt von $k(M,\rho)$ und $k(N,\sigma)$ und daher die Trägerebene e als gemeinsame Tangentialebene der beiden Kugeln im Punkt Z. Auch hier muss daher Z mit L übereinstimmen.

(f) Der Mittelpunkt des Schnittkreises ist gegeben durch den gemeinsamen Lotfußpunkt L der beiden Kugelmittelpunkte auf der Trägerebene e (siehe Teilaufgabe (b)).
Als Normalenvektor kann der Vektor $\overrightarrow{MN}$ verwendet werden.
Für den Radius ε des Schnittkreises gilt die Beziehung

$$\varepsilon^2 = \rho^2 - \overrightarrow{ML}^2 \quad \left(\text{oder auch } \varepsilon^2 = \sigma^2 - \overrightarrow{NL}^2\right).$$

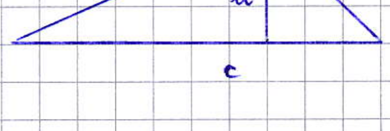
$$\varepsilon^2 = \frac{\rho^2 \cdot 4\overrightarrow{MN}^2 - \left(\overrightarrow{MN}^2\right)^2 - 2\overrightarrow{MN}^2\cdot\rho^2 + 2\overrightarrow{MN}^2\sigma^2 - (\rho^2-\sigma^2)^2}{4\overrightarrow{MN}^2}$$

Mit $(\rho^2-\rho^2)^2 = (\rho^2+\sigma^2)^2 - 4\rho^2\sigma^2$ erhalten wir

$$\varepsilon^2 = \frac{-\left(\overrightarrow{MN}^2\right)^2 + 2(\rho^2+\sigma^2)\overrightarrow{MN}^2 - (\rho^2+\sigma^2)^2 + 4\rho^2\sigma^2}{4\overrightarrow{MN}^2}$$

$$= \frac{4\rho^2\sigma^2 - \left(\overrightarrow{MN}^2 - (\rho^2+\sigma^2)\right)^2}{4\overrightarrow{MN}^2}$$

Anmerkung:



In der Euklidischen Geometrie gilt:

$$h^2 = \frac{4a^2b^2 - \left(c^2 - (a^2+b^2)\right)^2}{4c^2}$$

Lösung verworfen, Aufgabe neu formuliert!

Diese verworfene Lösung zeigt, dass sich die Kugeln genau dann in einem Kreis auf der Trägerebene schneiden, wenn $|\rho-\sigma| < d(M,N) < \rho+\sigma$ gilt!

Übung 24.18

(a) $x \in k(M,\rho) \wedge x \in k(N,\sigma)$

$$\Rightarrow (\vec{x}-\vec{M})^2 = \rho^2 \quad \wedge \quad (\vec{x}-\vec{N})^2 = \sigma^2$$

$$\Rightarrow \vec{x}^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{M} + \vec{M}^2 = \rho^2 \quad \wedge \quad \vec{x}^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{N} + \vec{N}^2 = \sigma^2$$

$$\Rightarrow -2\vec{x}\cdot\vec{M} + 2\vec{x}\cdot\vec{N} + \vec{M}^2 - \vec{N}^2 = \rho^2 - \sigma^2$$

Subtraktion

$$\Rightarrow 2\vec{x}\cdot(-\vec{M}+\vec{N}) + \vec{M}^2 - \rho^2 - \vec{N}^2 + \sigma^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\,\vec{MN}\cdot\vec{x} - \left[(\vec{N}^2-\sigma^2) - (\vec{M}^2-\rho^2)\right] = 0 \quad (\text{„Trägerebene"})$$

(b)
$$d(M,e) = \frac{|2\vec{MN}\cdot\vec{M} - ((\vec{N}^2-\sigma^2) - (\vec{M}^2-\rho^2))|}{\|2\vec{MN}\|}$$

$$= \frac{|-2\vec{M}^2 + 2\vec{M}\cdot\vec{N} - \vec{N}^2 + \sigma^2 + \vec{M}^2 - \rho^2|}{\|2\vec{MN}\|}$$

$$= \frac{|-\vec{M}^2 + 2\vec{M}\cdot\vec{N} - \vec{N}^2 + \sigma^2 - \rho^2|}{\|2\vec{MN}\|}$$

$$= \frac{|-(\vec{N}-\vec{M})^2 + \sigma^2 - \rho^2|}{\|2\vec{MN}\|} = \frac{|-\vec{MN}^2 + (\sigma^2-\rho^2)|}{\|2\vec{MN}\|}$$

$$d(M,e) = \rho \Leftrightarrow d(M,e)^2 = \rho^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\vec{MN}^2)^2 - 2\vec{MN}^2(\sigma^2-\rho^2) + (\sigma^2-\rho^2)^2}{4\vec{MN}^2} = \rho^2$$

$$\Leftrightarrow (\vec{MN}^2)^2 - 2\vec{MN}^2\sigma^2 + 2\vec{MN}^2\rho^2 + (\sigma^2-\rho^2)^2 = \rho^2\cdot 4\vec{MN}^2$$

$$\Leftrightarrow (\vec{MN}^2)^2 - 2\vec{MN}^2(\sigma^2+\rho^2) + (\sigma^2-\rho^2)^2 = 0$$

Diskriminante:

$$\Delta = 4(\sigma^2+\rho^2)^2 - 4\cdot 1\cdot(\sigma^2-\rho^2)^2$$

$$= 4\sigma^4 + 8\sigma^2\rho^2 + 4\rho^4 - 4\sigma^4 + 8\sigma^2\rho^2 - 4\rho^4 = 16\sigma^2\rho^2 > 0$$

(falls $\rho > 0 \wedge \sigma > 0$)

Es folgt:

$$d(M,e)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \vec{MN}^2 = \frac{2(\sigma^2+\rho^2) \pm 4\sigma\rho}{2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MN}^2 = (\sigma+\rho)^2 \vee \vec{MN}^2 = (\sigma-\rho)^2$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{MN}\| = \rho+\sigma \vee \|\vec{MN}\| = |\sigma-\rho| = |\rho-\sigma|$$

Die Gleichung der Trägerebene kann durch Multiplikation mit -1 wie folgt äquivalent umgeformt werden

$$-2\,\overrightarrow{MN}\cdot\vec{x} + \left[\left(\vec{N}^2-\sigma^2\right)-\left(\vec{M}^2-\rho^2\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,\overrightarrow{NM}\cdot\vec{x} - \left[\left(\vec{M}^2-\rho^2\right)-\left(\vec{N}^2-\sigma^2\right)\right]=0$$

Deswegen kann in analogen Rechenschritten gezeigt werden:

$$d(N,e)=\sigma \Leftrightarrow \|\overrightarrow{NM}\| = \sigma+\rho \;\vee\; \|\overrightarrow{NM}\| = |\rho-\sigma| = |\sigma-\rho|$$

Damit ist die Behauptung bewiesen:
Die Aussage $\|\overrightarrow{MN}\| = \rho+\sigma \vee \|\overrightarrow{MN}\| = |\rho-\sigma|$ ist genau dann wahr, wenn die Trägerebene von beiden Kugeln berührt wird.
Da $\overrightarrow{MN}$ ein Normalenvektor der Trägerebene ist, muss die Gerade MN ein Lot der Trägerebene sein. Der zugehörige Lotfußpunkt L ist der gemeinsame Berührpunkt der beiden Kugeln.
Welche der drei Gleichungen gültig ist hängt von der Lagebeziehung der drei Punkte ab:

Ist ein Punkt von $\overline{MN}$, dann gilt $\|\overrightarrow{MN}\| = \rho+\sigma$

Ist L kein Punkt von $\overline{MN}$, so gilt $\|\overrightarrow{MN}\| = |\rho-\sigma|$

Im zweiten Fall liegen die beiden Kugeln nicht nebeneinander, sondern ineinander!

(c) Damit die Trägerebene e die Kugeln schneidet, muss

$d(M,e)\le\rho$ und $d(N,e)\le\sigma$ gelten.

Gemäß Lösungsgang von Teilaufgabe (b) ist das der Fall, wenn $\overrightarrow{MN}^2$ zwischen den Lösungen $(\rho+\sigma)^2$ und $(\rho-\sigma)^2$ liegt, da der Leitkoeffizient der quadratischen Gleichung den positiven Wert 1 hat. Daraus ergibt sich sofort die Behauptung.

(d) Wenn die Doppelrelation $|\rho-\sigma| < d(M,N) < \rho+\sigma$ erfüllt ist, schneidet die Ebene e gemäß Teilaufgabe (b) und (c) in jeweils einen Kreis. Diese beiden Kreise müssen aus folgendem Grund identisch sein:

$$X \in k(M,\rho) \Rightarrow (\vec{X}-\vec{M})^2 = \rho^2 \qquad (1)$$

$$X \in e \Rightarrow 2\vec{MN}\cdot\vec{X} - \left[(\vec{N}^2-\sigma^2)-(\vec{M}^2-\rho^2)\right] = 0 \qquad (2)$$

Die Gleichung (2) ist durch Subtraktion der beiden Kugelgleichungen entstanden, daher liefert die Subtraktion (1) − (2) die Kugelgleichung

$(\vec{X}-\vec{N})^2 = \sigma^2$ und damit $X \in k(N,\sigma)$.

Der Mittelpunkt des Schnittkreises ist der Lotfußpunkt des Lots MN auf der Trägergeraden e.

$$(3):\quad MN:\ \vec{X} = \vec{M} + \lambda\vec{MN}$$

$$(3)\rightarrow(2):\quad 2\left(\vec{M}+\lambda\vec{MN}\right)\cdot\vec{MN} - \left[(\vec{N}^2-\sigma^2)-(\vec{M}^2-\rho^2)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{M}\cdot\vec{MN} + 2\lambda\vec{MN}^2 - \vec{N}^2 + \sigma^2 + \vec{M}^2 - \rho^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda\vec{MN}^2 - 2\vec{M}^2 + 2\vec{M}\cdot\vec{N} - \vec{N}^2 + \sigma^2 + \vec{M}^2 - \rho^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda\vec{MN}^2 - \vec{MN}^2 + \sigma^2 - \rho^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\vec{MN}^2 + \rho^2 - \sigma^2}{2\vec{MN}^2}$$

$$\vec{L} = \vec{M} + \frac{\vec{MN}^2 + \rho^2 - \sigma^2}{2\vec{MN}^2}\vec{MN}$$ „Mittelpunkt des Schnittkreises"

$$\Rightarrow \vec{ML} = \frac{\vec{MN}^2 + \rho^2 - \sigma^2}{2\vec{MN}^2}\vec{MN}$$

$$\Rightarrow \vec{ML}^2 = \frac{\left(\vec{MN}^2 + (\rho^2-\sigma^2)\right)^2}{4\vec{MN}^2}$$

Sei ε der Radius des Schnittkreises, dann gilt:

$$\varepsilon^2 = \rho^2 - \vec{ML}^2 = \frac{\rho^2\cdot 4\vec{MN}^2 - (\vec{MN}^2)^2 - 2\vec{MN}^2\rho^2 + 2\vec{MN}^2\sigma^2 - (\rho^2-\sigma^2)^2}{4\vec{MN}^2}$$

$$= \frac{-(\vec{MN}^2)^2 + 2(\rho^2+\sigma^2)\vec{MN}^2 - (\rho^2-\sigma^2)^2}{4\vec{MN}^2}$$

$$= \frac{4\rho^2\sigma^2 - \left(\vec{MN}^2 - (\rho^2+\sigma^2)\right)^2}{4\vec{MN}^2}$$

$$\left.\right\}\ (\rho^2-\sigma^2)^2 = (\rho^2+\sigma^2) - 4\rho^2\sigma^2$$

Übung 24.19

(a) $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\vec{M}^2 = 78$; $\rho^2 = 12$; $\vec{N}^2 = 26$; $\sigma^2 = 18$

$$e: \; 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \left[(26-18) - (78-12) \right] = 0 \iff \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 58 = 0$$

$\rho + \sigma = \sqrt{12} + \sqrt{18} \approx 7{,}7067$; $|\rho - \sigma| = \sqrt{18} - \sqrt{12} \approx 0{,}7785$

$\|\overrightarrow{MN}\| = 6$; $k(M,\rho)$ und $k(N,\sigma)$ schneiden sich in einem Kreis

Mittelpunkt des Kreises: $\vec{L} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{36 + 12 - 18}{2 \cdot 36} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16/3 \\ 17/6 \\ 10/3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor des Kreises: $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Radius des Kreises: $\varepsilon^2 = \dfrac{4 \cdot 12 \cdot 18 - \left(36 - (12+18)\right)^2}{4 \cdot 36} = \dfrac{23}{4}$

$\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{23} \approx 2{,}3979$

(b) $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -18 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{MN}^2 = 441$; $\vec{M}^2 = 509$; $\rho^2 = 49$; $\vec{N}^2 = 74$; $\sigma^2 = 196$

$$e: \; 2 \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \left[(74-196) - (509-49) \right] = 0 \iff \begin{pmatrix} -36 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 582 = 0$$

$\rho + \sigma = 7 + 14 = 21$; $|\rho - \sigma| = 14 - 7 = 7$

$\|\overrightarrow{MN}\| = 21$; $k(M,\rho)$ und $k(N,\sigma)$ berühren sich in einem Punkt L.

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ -13 \end{pmatrix} + \frac{441 + 49 - 196}{2 \cdot 441} \begin{pmatrix} -18 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ -13 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -18 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}$$