

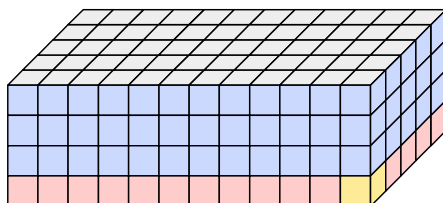


§23 Volumenberechnung und Spatprodukt

Eine etablierte Flächenberechnung ist die Grundlage für eine Einführung in die Berechnung von Volumina. Das zeigt schon das Prinzip der Volumenmessung von Prismen, das wir aus der Mittelstufenmathematik kennen:

$$\text{Volumen} = \text{Grundflächeninhalt} \cdot \text{Höhe}$$

Dieses Prinzip beruht auf dem Zählen von Volumeneinheiten:



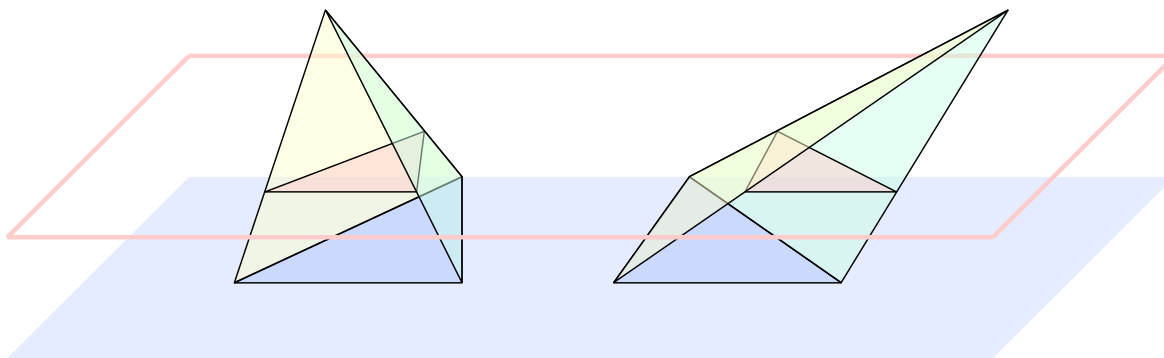
$$[(\text{Anzahl der Maßeinheiten in einer Reihe}) \cdot (\text{Anzahl der Reihen in einer Schicht})] \cdot (\text{Anzahl der Schichten})$$

$$\text{Maßeinheit} = \text{Würfel mit der Kantenlänge } 1$$

Anfänglich gilt das Prinzip nur für Quader. Durch diagonale Halbierung wird es auf dreiseitige Prismen und durch Triangulierung der Grundfläche auf Prismen mit polygonaler Grundfläche übertragen. Anschließend wird das Berechnungsverfahren mit Hilfe des Prinzips des Cavalieri¹ auf schräge Prismen ausgedehnt.

Prinzip des Cavalieri

Liegen zwei Körper auf einer Ebene und erzeugen alle Querschnitte, die parallel zu dieser Ebene ausgeführt werden, bei beiden Körpern denselben Querschnittsflächeninhalt, dann haben die Körper dasselbe Volumen.



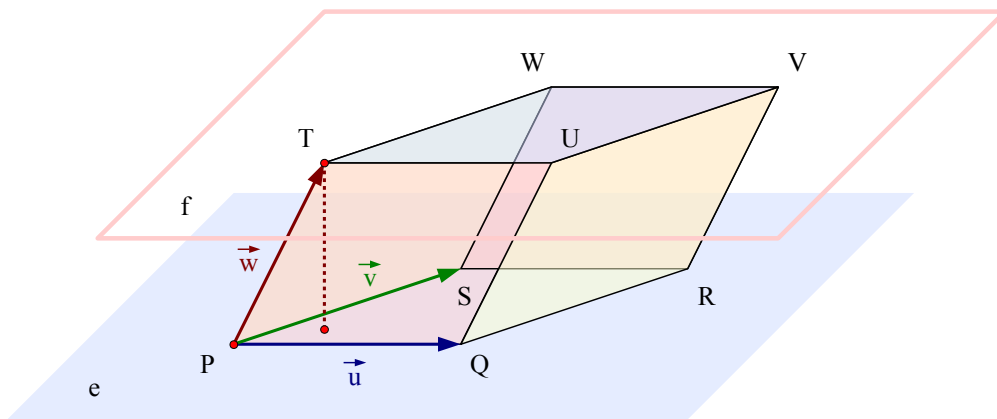
Weil nun unter Einsatz des Prinzips des Cavalieri ein dreiseitiges Prisma in drei volumengleiche Tetraeder zerlegt werden kann, gilt zunächst für Tetraeder, dann aber für alle Pyramiden mit polygonaler Grundfläche das Messprinzip

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundflächeninhalt} \cdot \text{Höhe}$$

Soweit eine kurze Geschichte aus der klassischen Stereometrie als gedanklicher Hintergrund der Volumenmessung im Modellraum.

Der Türöffner für die Flächenberechnung war im vorangegangenen Paragraphen das Parallelogramm; diese Rolle übernimmt für die Volumenberechnung der Spat. So wie zwei Vektoren an jedem Raumpunkt in kanonischer Weise ein Parallelogramm erzeugen, ergibt sich in natürlicher Weise an jedem Raumpunkt ein Spat, wenn ein dritter Vektor ins Spiel kommt (siehe folgende Abbildung).

¹ https://de.wikipedia.org/wiki/Prinzip_von_Cavalieri



Den abgebildeten Spat bezeichnen wir mit $\langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Seine neben dem *Quellpunkt* P weiteren sieben Eckpunkte sind gegeben durch

$$\vec{Q} = \vec{P} + \vec{u}, \vec{R} = \vec{P} + \vec{u} + \vec{v}, \vec{S} = \vec{P} + \vec{v}, \vec{T} = \vec{P} + \vec{w}, \vec{U} = \vec{P} + \vec{u} + \vec{w}, \vec{V} = \vec{P} + \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{W} = \vec{P} + \vec{v} + \vec{w}$$

In der folgenden Heuristik werden die Bezeichnungen dieser Abbildung benutzt.

Der Flächeninhalt der Grundfläche $\langle PQRS \rangle$ des Spates $\langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ wird durch den vektoriellen Ausdruck geliefert. Im Anschauungsraum erhalten wir daher sein Volumen, indem wir diesen Flächeninhalt mit der Höhe des Spates multiplizieren.

Sei f die (obere) Grundflächenebene, in der das Parallelogramm $\langle TUVW \rangle$ liegt. Dann ist die Höhe des Spates durch den Abstand der parallelen Grundflächenebenen e und f gegeben. Gemäß Satz (19.4) stimmt dieser Abstand mit dem Abstand überein, den der Punkt $T \in f$ zur Grundflächenebene e hat. Diesen Wert liefert wiederum die Hessesche Abstandsformel. Verwenden wir als Normalenvektor der Grundflächenebene e den Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$, und als ihren Stützpunkt den Punkt P, so gilt gemäß Definition (16.1):

$$d(T, e) = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{PT}|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} \text{ und äquivalent dazu } \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot d(T, e) = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$$

Nun steht aber auf der linken Seite der zweiten Gleichung nichts anderes als das Produkt aus Grundflächeninhalt und Höhe des Spates. Also beschreibt der vektorielle Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung zwangsläufig das Volumen, das der Spat im Anschauungsraum besitzt – heureka! Wir werden diese Erkenntnis gleich zum Anlass nehmen, eine erste Volumendefinition im Modellraum zu verfassen.

Zuvor merken wir noch an, dass wir das Volumenmaß \hat{v} (wie „volumen“) im Modellraum als Funktion begreifen, die bestimmten Punktmengen eine nicht negative reelle Zahl als ihren Rauminhalt zuordnet. Zugelassen zur Volumenbestimmung sind im Rahmen dieser Abhandlung alle Punktmengen, die sich aus endlich vielen Tetraedern zusammensetzen lassen. Für die Funktionsweise auf diesem eingegrenzten Definitionsbereich werden folgende Anforderungen formuliert:

(23.1) Anforderungen an das Volumenmaß

- I Ein Würfel mit der Seitenlänge 1 besitzt das Volumen 1 („Normierung“).
- II Eine ebene Fläche besitzt unabhängig von ihrer Ausdehnung das Volumen 0 („Dünne Menge“).
- III Sind m und n zwei disjunkte Punktmengen so ist das Volumen der Vereinigung der Mengen die Summe ihrer Volumina: $\hat{v}(m \cup n) = \hat{v}(m) + \hat{v}(n)$ („Additivität“).
- IV Ist m eine Punktmenge, die durch eine Kongruenzabbildung (Spiegelung, Verschiebung, Drehung, ...) aus der Punktmenge n hervorgeht, dann gilt $\hat{v}(m) = \hat{v}(n)$ („Kongruenzinvarianz“).

Offensichtlich erfolgt die Formulierung der vier Anforderungen analog zu den Anforderungen an das Flächenmaß (22.11). Da übrigens auch die Längenmessung, so wie sie im Paragraphen §14 eingeführt wurde, diese Anforderungen respektiert, wird klar, warum es mit der „Maßtheorie“ eine eigene Disziplin in der Mathematik gibt, die anwendungsübergreifend abstrakte Erkenntnisse über das Messen bereitstellt.

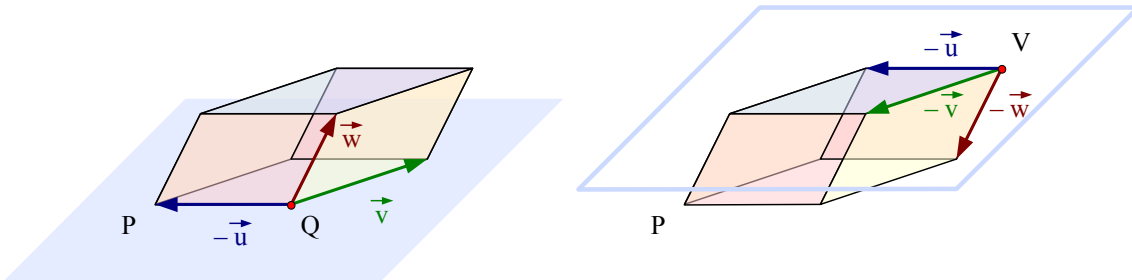


(23.2) Definition

Gegeben seien drei Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} .

Dann wird dem Spat $\langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$, der von diesen drei Vektoren an irgendeinem Raumpunkt P aufgespannt wird, das Volumen $|\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|$ zugeordnet: $\hat{v} \langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle := |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$

Die Definition macht auf den ersten Blick aufgrund ihrer Schlichtheit einen sympathischen Eindruck. Es stellt sich aber sofort die kritische Frage, ob das Spatvolumen unabhängig von der Wahl des Quellpunktes und der Wahl der Grundfläche definiert ist.

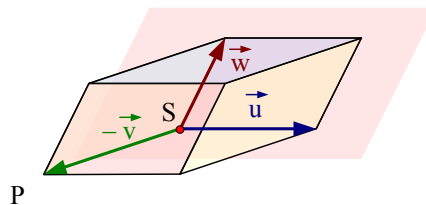


Für die Wahl des Quellpunktes finden wir eine schnelle Antwort. Wählen wir für die Quellpunkte Q, R und S das Parallelogramm $\langle PQRS \rangle$ und für die Quellpunkte T, U, V und W das Parallelogramm $\langle TUVW \rangle$ als Grundfläche, liefert die Definition (23.2) stets dasselbe Volumen, weil nur die Vorzeichen der aufspannenden Vektoren geändert werden müssen. Also bleibt der Wert des Ausdrucks zwischen den Betragsstrichen wegen der Rechenregeln für das Vektor- und das Skalarprodukt bis auf das Vorzeichen unverändert.

Beispielsweise hat der identische Spat $\langle Q, \vec{v}, -\vec{u}, \vec{w} \rangle$ gemäß Definition (13.2) das Volumen

$$|(\vec{v} \times (-\vec{u})) \cdot \vec{w}| = | -((-\vec{u}) \times \vec{v}) \cdot \vec{w} | = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$$

Es bleibt für die Wohldefiniertheit des Spatvolumens zu prüfen, ob bei Beibehaltung des Quellpunktes die Grundfläche gewechselt werden kann.



In der vorstehenden Abbildung ist für den Quellpunkt S das Parallelogramm $\langle SRVW \rangle$ als Grundfläche gewählt worden. Gemäß Definition (23.2) erhalten wir als Volumen

$$|(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot (-\vec{v})| = | -(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} | = |(\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v}|$$

Damit stellt sich die nicht triviale Frage, ob in dem Ausdruck $|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$ die Plätze getauscht werden können, ohne dass sich sein Wert ändert. Aufschluss darüber gibt die folgende Berechnungsformel.

(23.3) Berechnungsformel

Sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ drei Vektoren, so gilt $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$,

wobei rechts vom Gleichheitszeichen eine 3x3-Determinante notiert ist.

Beweis:

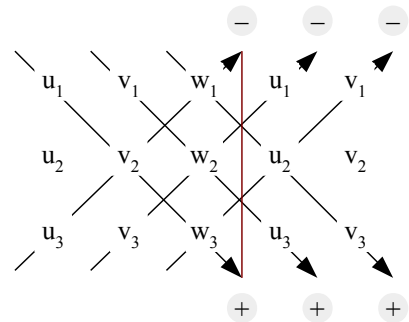
Gemäß (15.16) gilt $\vec{u} \times \vec{v} := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$.



Daher folgt:

$$\begin{aligned}
 & (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \\
 &= u_2 v_3 w_1 - u_3 v_2 w_1 - u_1 v_3 w_2 + u_3 v_1 w_2 + u_1 v_2 w_3 - u_2 v_1 w_3 \\
 &= u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - u_3 v_2 w_1 - v_3 w_2 u_1 - w_3 u_2 v_1
 \end{aligned}$$

Der Ausdruck nach dem letzten Gleichheitszeichen ergibt sich aber auch aus der bekannten „Regel von Sarrus“ für Determinanten (siehe rechts).



Aus der Mittelstufenmathematik wissen wir, dass zyklisches Tauschen von Spalten (oder Reihen) den Wert einer Determinante nicht ändert. Falls dieser Sachverhalt nicht geläufig sein sollte, kann er mit Hilfe des Rechenschemas leicht verifiziert werden:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 & u_1 & v_1 \\ w_2 & u_2 & v_2 \\ w_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & u_1 \\ v_2 & w_2 & u_2 \\ v_3 & w_3 & u_3 \end{vmatrix}$$

Also verändert ein Wechsel der Grundfläche das Spatvolumen nicht. Die Definition (23.2) ist wirklich „gut“! Aufgrund seiner herausragenden Bedeutung geben wir dem Vektorausdruck $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ einen Namen:

(23.4) Definition

Gegeben seien Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} .
 Dann heißt der Ausdruck $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ Spatprodukt von \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} .
 Das Spatprodukt wird abkürzend mit $[\vec{u} \vec{v} \vec{w}]$ bezeichnet.

Der Spat $\langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ hat also das Volumen $|[\vec{u} \vec{v} \vec{w}]|$: $\hat{v} \langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = |[\vec{u} \vec{v} \vec{w}]|$

Für das Spatprodukt gelten folgende Rechenregeln:

(23.5) Rechenregeln

- (a) $[\vec{u} \vec{v} \vec{w}] = [\vec{w} \vec{u} \vec{v}] = [\vec{v} \vec{w} \vec{u}]$ Zyklische Kommutativität
- (b) $[\vec{u} \vec{v} \vec{w}] = -[\vec{v} \vec{u} \vec{w}]$ Antikommutativität in allen Positionspaaren
 $[\vec{u} \vec{v} \vec{w}] = -[\vec{w} \vec{v} \vec{u}]$
 $[\vec{u} \vec{v} \vec{w}] = -[\vec{u} \vec{w} \vec{v}]$
- (c) $\lambda [\vec{u} \vec{v} \vec{w}] = [(\lambda \vec{u}) \vec{v} \vec{w}] = [\vec{u} (\lambda \vec{v}) \vec{w}] = [\vec{u} \vec{v} (\lambda \vec{w})]$ Gemischte Assoziativität
- (d) $[(\vec{u} + \vec{x}) \vec{v} \vec{w}] = [\vec{u} \vec{v} \vec{w}] + [\vec{x} \vec{v} \vec{w}]$ Distributivität in allen Positionen
 $[\vec{u} (\vec{v} + \vec{x}) \vec{w}] = [\vec{u} \vec{v} \vec{w}] + [\vec{u} \vec{x} \vec{w}]$
 $[\vec{u} \vec{v} (\vec{w} + \vec{x})] = [\vec{u} \vec{v} \vec{w}] + [\vec{u} \vec{v} \vec{x}]$

Die Gültigkeit der Regel (23.5) (a) wurde bereits oben gesichert. Die übrigen drei Regeln können auf einfache Weise aus den Rechenregeln für das Vektor- und das Skalarprodukt abgeleitet werden (siehe Übungen).

Es wird nun geprüft, dass die Definition (23.2) die Anforderung (23.1) I erfüllt. Dazu wird zunächst die Begriffsbildungen von §13 ergänzt:

(23.6) Definition

Ein Spat heiße *Quader*, wenn seine erzeugenden Vektoren paarweise orthogonal sind.
 Ein Quader heiße *Würfel*, wenn seine erzeugenden Vektoren denselben Betrag besitzen. Der gleiche Betrag der erzeugenden Vektoren heiße *Kantenlänge des Würfels*.



Nun folgt die Validierung von Anforderung (23.1) I.

(23.7) Bemerkung

Gegeben seien drei paarweise orthogonale Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} .

Dann gilt $||[\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}]|| = ||\vec{u}|| ||\vec{v}|| ||\vec{w}||$.

Beweis:

Da der Vektor \vec{w} sowohl orthogonal zum Vektor \vec{u} als auch orthogonal zum Vektor \vec{v} ist, muss \vec{w} nach dem 2. Normalenvektorsatz (15.13) in der Fassung der Bemerkung (15.19) linear abhängig vom Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ sein.

Mit der Cauchy-Schwartzschen-Ungleichung (14.15) folgt:

$$||[\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}]|| = ||\vec{u} \times \vec{v}|| ||\vec{w}||$$

Da die Vektoren \vec{u} und \vec{v} ebenfalls orthogonal sind, ergibt sich nach Bemerkung (22.4):

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| ||\vec{v}||$$

Damit ist die Bemerkung bewiesen.

Im Falle, dass die drei Vektoren den gleichen Betrag b , beispielsweise $b = 1$, besitzen, gilt $||[\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}]|| = b^3$.

Wir werden uns nun um die Anforderung (23.1) II kümmern. Dazu sei angemerkt, dass das Spatprodukt linear abhängiger Vektoren verschwindet.

(23.8) Bemerkung

Gegeben seien drei linear abhängige Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} .

Dann gilt $[\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}] = 0$.

Beweis:

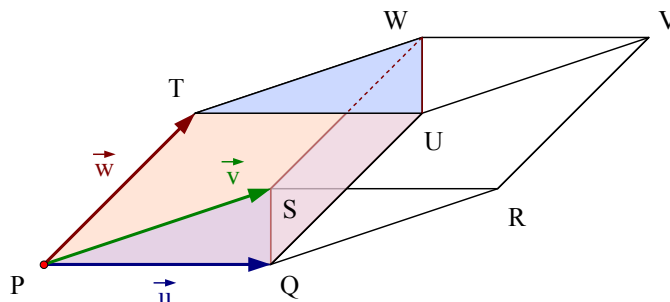
Sind die Vektoren \vec{u} und \vec{v} linear abhängig, so ist nach Satz (15.17) der Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ der Nullvektor. Folglich ist die Bemerkung in diesem Fall trivialerweise richtig.

Sind die Vektoren \vec{u} und \vec{v} linear unabhängig, so folgt aus der Voraussetzung, dass der Vektor \vec{w} eine Linearkombination von \vec{u} und \vec{v} sein muss. Dann ist \vec{w} aber nach dem ersten Orthogonalitätstheorem (15.5) orthogonal zum Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$. Das bedeutet aber $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$.

Ein Spat hat also immer das Volumen 0, wenn seine erzeugenden Vektoren linear abhängig sind. Insbesondere hat ein (ebenes) Parallelogramm das Volumen 0, weil es sich als ein Spat darstellen lässt, in dem der dritte erzeugende Vektor der Nullvektor ist. Die Definition (23.2) respektiert die Anforderung (23.2) II.

Dieser Sachverhalt erlaubt uns, für den Modellraum festzustellen dass sich das Volumens eines Spates nicht verändert, wenn eine oder mehrere der sechs begrenzenden Seiten abgetrennt werden. Die Bemerkung (23.8) stellt sicher, dass diese Feststellung nicht gegen die Anforderung (23.2) III verstößt.

Im Folgenden wird der Definitionsbereich der Volumenfunktion \hat{v} auf dreiseitige Prismen erweitert. Dazu betrachten wir das dreiseitige Prisma, das durch den Quellpunkt P und die drei Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} erzeugt wird. Zur Unterstützung der gewünschten Wahrnehmung der folgenden Abbildung sei darauf hingewiesen, dass das Dreieck $\langle T \ U \ W \rangle$ die Deckfläche des Prismas sein soll.





Offensichtlich lässt sich ein dreiseitiges Prisma immer als eine Hälfte eines Spates begreifen. Diese Einsicht wird sogleich umgesetzt:

(23.9) Definition

Dem dreiseitigen Prisma $\langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ wird das Volumen $\frac{1}{2} | [\vec{u} \vec{v} \vec{w}] |$ zugeordnet.

Dieser Definition zufolge verschwindet das Volumen eines (ebenen) Dreiecks im Einklang mit Anforderung (23.1) II. Die folgende Bemerkung stellt sicher, dass die Definitionen (23.9) und (23.2) im Sinne der Anforderung (23.1) III kompatibel sind:

(23.10) Bemerkung

$$\hat{v}(\text{Prisma} \langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle) + \hat{v}(\text{Prisma} \langle R, -\vec{u}, -\vec{v}, \vec{w} \rangle) - \hat{v}(\langle \text{SQUW} \rangle) = \hat{v}(\text{Spat} \langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle)$$

Beweis:

$$\text{Es gilt } \hat{v}(\text{Prisma} \langle R, -\vec{u}, -\vec{v}, \vec{w} \rangle) = \frac{1}{2} | [-\vec{u} - \vec{v} \vec{w}] | = \frac{1}{2} | [\vec{u} \vec{v} \vec{w}] | \text{ und } \hat{v}(\langle \text{SQUW} \rangle) = 0.$$

Die Definition des Volumens dreiseitiger Prismen respektiert das Prinzip „Volumen = Grundflächeninhalt · Höhe“:

(23.11) Bemerkung

Sei $\langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ ein dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche $\langle P, \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Sei e die Grundflächenebene, in der das Dreieck $\langle P, \vec{u}, \vec{v} \rangle$ liegt.

Sei T derjenige Eckpunkt des Prismas, der durch $\vec{T} = \vec{P} + \vec{w}$ definiert ist.

Dann gilt: $\hat{v} \langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \hat{a} \langle P, \vec{u}, \vec{v} \rangle \cdot d(T, e)$

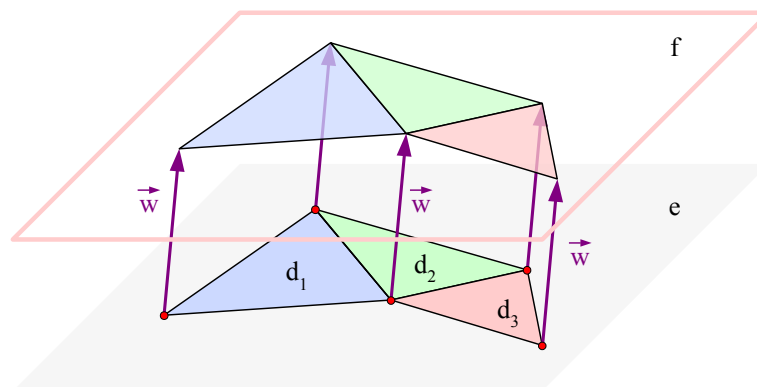
Beweis:

Sind die Vektoren \vec{u} und \vec{v} linear abhängig, ist die Gleichung trivialerweise erfüllt. Wir gehen also davon aus, dass \vec{u} und \vec{v} linear unabhängig sind. Dann gilt gemäß der Hesseschen Abstandsformel

$$d(T, e) = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{PT}|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} \Leftrightarrow \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot d(T, e) = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \Leftrightarrow \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot d(T, e) = \frac{1}{2} |[\vec{u} \vec{v} \vec{w}]|$$

Offensichtlich durften wir im Beweis der Bemerkung (23.11) ein zweites Mal den in der Hesseschen Abstandsformel verborgenen großartigen Zusammenhang anwenden, der auf Seite 2 dieses Paragraphen zur Entdeckung der Volumenformel für Spate führte.

Unter Bezugnahme auf die folgende Abbildung wird im nächsten Schritt das Volumen polygonaler Prismen erklärt.





(23.12) Definition

Sei ein Prisma zwischen zwei parallelen Ebenen e und f gegeben durch die Fläche p eines triangulierbaren Polygons in der Ebene e und einem Kantenvektor \vec{w} , der die Fläche p von der Ebene e in die Ebene f verschiebt.

Ist $p = d_1 \cup d_2 \cup d_3 \cup \dots$ eine Triangulierung der Grundfläche, dann sei das Volumen des Prismas die Summe der Volumina der dreiseitigen Prismen, die durch die Triangulierung entstehen:

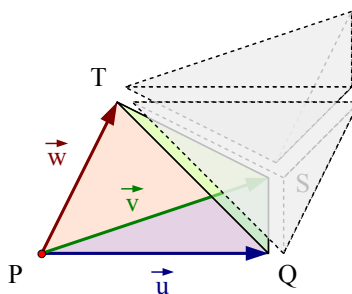
$$\hat{v}(p) := \hat{v}(d_1) + \hat{v}(d_2) + \hat{v}(d_3) + \dots$$

Da bei der Berechnung der Volumina der aus der Triangulierung der Grundfläche hervorgehenden dreiseitigen Prismen stets derselbe Kantenvektor \vec{w} verwendet wird, kann durch Anwendung des Distributivgesetzes für das Spatprodukt in einer kurzen Rechnung gezeigt werden, dass auch diese Definition (23.12) das Prinzip

$$\text{„Volumen} = \text{Grundflächeninhalt} \cdot \text{Höhe“}$$

für die Volumenmessung von Prismen respektiert.

Durch Definition des Volumens von Tetraedern wird nun das Tor zur Berechnung von beliebigen Polyedern geöffnet.



Da, wie eingangs dieses Paragraphen erwähnt, ein dreiseitiges Prisma im Anschauungsraum stets in drei volumen-gleiche Tetraeder zerlegt werden kann, nehmen wir im Modellraum folgende Definition vor:

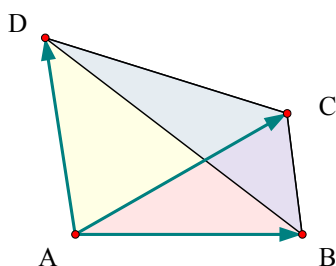
(23.13) Definition

Sei $\langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ ein Tetraeder, der am Quellpunkt P von den Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} erzeugt wird.

Dann werde diesem Tetraeder das Volumen $\frac{1}{6} | [\vec{u} \vec{v} \vec{w}] |$ zugeordnet.

Im Gegensatz zu Prismen sind bei Tetraedern keine Seitenflächen als Grundflächen ausgezeichnet. Deswegen verge-wissern wir uns, dass das Volumen unabhängig von der Wahl der Grundfläche definiert ist.

Dafür lösen wir uns von der gedanklich eng führenden Bezeichnungsweise der Definition (23.13). Schließlich müssen nur vier (gleichberechtigte) Raumpunkte A, B, C und D gegeben sein, damit ein Tetraeder $\langle ABCD \rangle$ vorliegt. Je drei der vier Punkte definieren eine seiner vier dreieckigen Seitenflächen. Wählen wir eine Seitenfläche als Grundfläche, ist der verbleibende vierte Punkt die Spitze des Tetraeders.



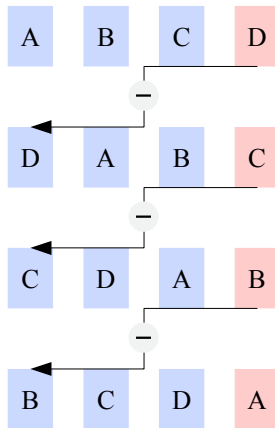


(23.14) Bemerkung

Gegeben sei ein Tetraeder $\langle ABCD \rangle$

Dann beträgt sein Volumen unabhängig von der Wahl des Quellpunkts und der Grundfläche

$$\hat{v} \langle ABCD \rangle = \frac{1}{6} | [\vec{A} \vec{B} \vec{C}] - [\vec{D} \vec{A} \vec{B}] + [\vec{C} \vec{D} \vec{A}] - [\vec{B} \vec{C} \vec{D}] |$$



Beweis:

Offenbar gilt $\langle ABCD \rangle = \langle A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \rangle$ und daher nach Definition (23.13)

$$\hat{v} \langle ABCD \rangle = \frac{1}{6} | [\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}] |$$

Wir multiplizieren das Spatprodukt zwischen den Betragsstrichen unter Anwendung des Distributivgesetzes aus. Dabei lassen wir alle Terme weg, in denen \vec{A} doppelt auftritt, weil diese den Wert 0 haben:

$$[\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}] = [(\vec{B} - \vec{A})(\vec{C} - \vec{A})(\vec{D} - \vec{A})] = [\vec{B} \vec{C} \vec{D}] - [\vec{B} \vec{C} \vec{A}] - [\vec{B} \vec{A} \vec{D}] - [\vec{A} \vec{C} \vec{D}]$$

Nun sortieren wir die vier Terme im Sinne der Behauptung und wenden innerhalb der vier Spatprodukte, soweit erforderlich, das Antikommutativgesetz an, um deren Faktoren in die gewünschte Reihenfolge zu bringen:

$$[\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}] = -[\vec{B} \vec{C} \vec{A}] - [\vec{B} \vec{A} \vec{D}] - [\vec{A} \vec{C} \vec{D}] + [\vec{B} \vec{C} \vec{D}] = -[\vec{A} \vec{B} \vec{C}] + [\vec{D} \vec{A} \vec{B}] - [\vec{A} \vec{C} \vec{D}] + [\vec{B} \vec{C} \vec{D}]$$

Durch Ausklammern eines Minuszeichens und setzen der Betragsstriche, die dieses eliminieren, erhalten wir abschließend die Behauptung:

$$| [\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}] | = | -([\vec{A} \vec{B} \vec{C}] - [\vec{D} \vec{A} \vec{B}] + [\vec{A} \vec{C} \vec{D}] - [\vec{B} \vec{C} \vec{D}]) |$$

Der Volumenterm kann durch das oben abgebildete Rotationsschema erzeugt werden. Zum Verständnis des Schemas:

Wird der vierte Punkt hineinrotiert, wird aus $[\vec{A} \vec{B} \vec{C}]$ mit einem Vorzeichenwechsel $-[\vec{D} \vec{A} \vec{B}]$.

Die nächste Rotation macht aus $-[\vec{D} \vec{A} \vec{B}]$ mit einem weiteren Vorzeichenwechsel $-(-[\vec{C} \vec{D} \vec{A}])$.

usw.

Das Schema zeigt, dass alle vier Eckpunkte gleichberechtigt und austauschbar in die Volumenberechnung eingehen. Es spielt daher keine Rolle, welcher Eckpunkt als Quellpunkt des Tetraeders im Sinne der Definition (23.13) gewählt wird. Jede Wahl führt auf denselben Volumenterm.

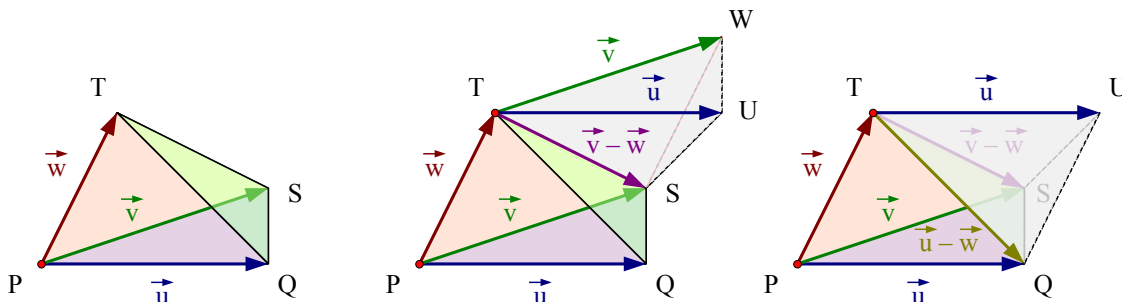


Pflichtgemäß wird nun überprüft, ob die Definition (23.13) des Volumens eines Tetraeders im Sinne der Anforderung (23.1) III mit der Definition (23.9) des Volumens von dreiseitigen Prismen verträglich ist.

(23.15) Satz

Gegeben sei ein Tetraeder $\langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Dann gibt es zwei weitere volumengleiche, bis auf „dünne“ Überschneidungen disjunkte Tetraeder, mit denen der gegebene Tetraeder zu einem dreiseitigen Prisma ergänzt werden kann.



Beweis:

Der Tetraeder $\langle T, \vec{u}, \vec{v}, \vec{v} - \vec{w} \rangle$ (siehe mittleres Bild) besitzt das Volumen

$$\frac{1}{6} | [\vec{u} \vec{v} (\vec{v} - \vec{w})] | = \frac{1}{6} | [\vec{u} \vec{v} \vec{v}] - [\vec{u} \vec{v} \vec{w}] | = \frac{1}{6} | 0 - [\vec{u} \vec{v} \vec{w}] | = \frac{1}{6} | [\vec{u} \vec{v} \vec{w}] |$$

Der Tetraeder $\langle T, \vec{u} - \vec{w}, \vec{u}, \vec{v} - \vec{w} \rangle$ (siehe rechtes Bild) besitzt das Volumen

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} | [(\vec{u} - \vec{w}) \vec{u} (\vec{v} - \vec{w})] | &= \frac{1}{6} | [\vec{u} \vec{u} \vec{v}] - [\vec{w} \vec{u} \vec{v}] - [\vec{u} \vec{u} \vec{w}] + [\vec{w} \vec{u} \vec{w}] | \\ &= \frac{1}{6} | 0 - [\vec{w} \vec{u} \vec{v}] - 0 + 0 | = \frac{1}{6} | -[\vec{w} \vec{u} \vec{v}] | = \frac{1}{6} | [\vec{u} \vec{v} \vec{w}] | \end{aligned}$$

Offensichtlich ergänzen sich die drei Tetraeder zu einem dreiseitigen Prisma. Dass doppelt auftretende (dreieckige) Kontaktflächen ignoriert werden können, wurde bereits oben festgestellt.

Offensichtlich respektiert die Definition (23.13) das Messprinzip für Pyramiden:

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundflächeninhalt} \cdot \text{Höhe}$$

Grundsätzlich können nun die Volumina aller Polyeder berechnet werden, die sich in endlich viele Tetraeder zerlegen lassen. „Zerlegen“ heißt dabei, dass sich die Teil-Tetraeder nur in Kanten oder Dreiecksflächen überschneiden. Die Volumina dieser Kontaktmengen sind wegen Bemerkung (23.8) stets gleich null.