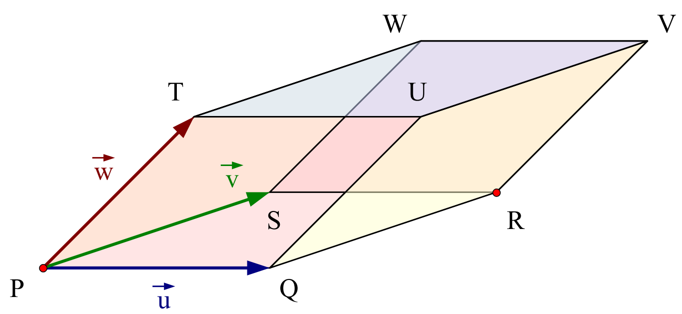
Übungen zu §23

Übung 23.1

Gegeben ist ein Spat $\langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ durch

$P = (5; -2; 7)$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



(a) Berechne das Volumen des Spates.

(b) Gib die alternative Bezeichnung für diesen Spat an, wenn als Quellpunkt der Punkt R und als Grundfläche das Parallelogramm $\langle RVUQ \rangle$ gewählt wird.

(c) Berechne, ausgehend von der Darstellung in Teilaufgabe (b), ein zweites Mal das Volumen des Spates.

Übung 23.2

Gegeben ist ein Spat $\langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ und ein Vektor $\vec{s}$.

Werden die acht Eckpunkte P, Q, R, S, T, U, V, W vermöge des Vektors $\vec{s}$ auf die Punkte P', Q', R', S', T', U', V', W' verschoben (das heißt, $\vec{P}' = \vec{P} + \vec{s}$ usw.), entsteht ein neuer Quader.

Erläutere, warum dieser verschobene Quader dasselbe Volumen wie der ursprüngliche Quader haben muss.

Übung 23.3

Gegeben sind die fünf Punkte A = (–3; 0 ; 1), B = (2; –4; 7), C = (6; 1; –3), D = (34; –5; 1) und E = (1; 5; –9).

(a) Zeige, dass die fünf Punkte ein ebenes Fünfeck $\langle ABCDE \rangle$ bilden.

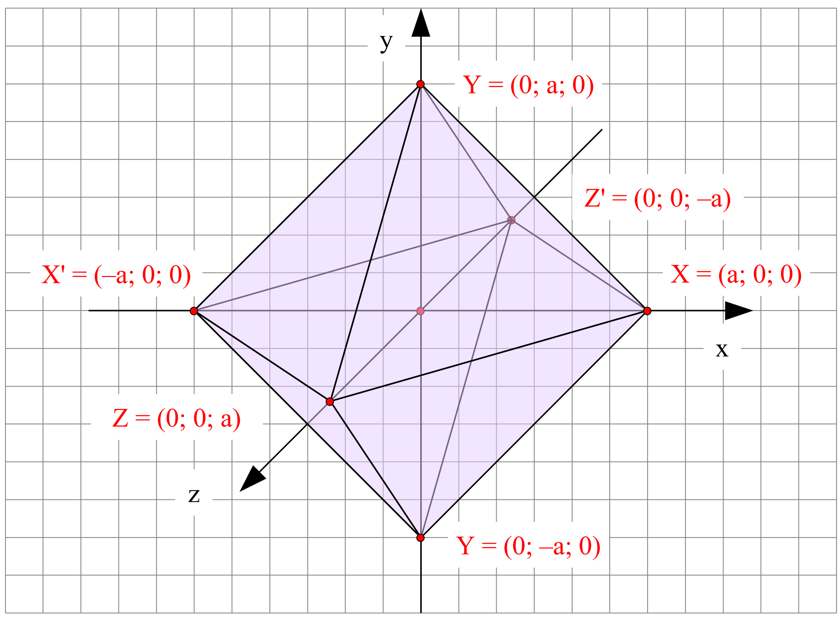
(b) Fertige eine affine Skizze des Fünfecks an und bilde eine Triangulierung.

(c) Berechne mit Hilfe dieser Triangulierung der Grundfläche das Volumen der Pyramide, die das Fünfeck als Grundfläche und den Ursprung O =(0; 0; 0) als Spitze besitzt.

(d) Zeige, dass sich das Volumen auch als Produkt aus Grundflächeninhalt und Abstand des Ursprungs von der Grundflächenebene ergibt.

Übung 23.4

Rechts abgebildet ist ein regelmäßiger Oktaeder[1].



(a) Berechne die Summe der Längen aller Kanten.

(b) Berechne den Flächeninhalt der Oberfläche.

(c) Berechne das Volumen.

(d) Vergleiche die Ergebnisse der Teilaufgaben (b) und (c) mit den Formeln, die in der Webseite

de.wikipedia.org/wiki/Oktaeder

angegeben werden und löse den scheinbaren Widerspruch auf.

(e) Berechne den Winkel zwischen zwei benachbarten Flächen.

(f) Berechne den Winkel zwischen der Grundfläche XYX'Y' und den Seitenflächen.

1 Ein regelmäßiger Oktaeder ist einer der fünf „Platonischen Körper“ (siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_Körper).

Übung 23.5

Beweise die Rechenregeln (23.5) (b), (c) und (d) für das Spatprodukt.

Übung 23.6

Beweise mit Bezug auf die Bemerkung (23.14), dass das Volumen des Tetraeders auch dann durch die Formel

$$\hat{v}\langle ABCD\rangle = \frac{1}{6}\,|\,[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}] - [\vec{D}\,\vec{A}\,\vec{B}] + [\vec{C}\,\vec{D}\,\vec{A}] - [\vec{B}\,\vec{C}\,\vec{D}]\,|$$

gegeben ist, wenn bei der Berechnung davon ausgegangen wird, dass der Punkt C als Quellpunkt und das Dreieck $\langle CDB\rangle$ als Grundfläche des Tetraeders gewählt wird.

Übung 23.7

Gegeben ist die Ebene $e: \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} - 12 = 0$.

(a) Bestimme die Schnittpunkte A, B und C der Ebene mit den Koordinatenachsen. Diese Schnittpunkte heißen „Spurpunkte“ der Ebene.

(b) Berechne das Volumen des Tetraeders $\langle ABCO\rangle$, der als Grundfläche das Dreieck $\langle ABC\rangle$ und als Spitze den Ursprung O = (0; 0; 0) besitzt. [Tipp: Verwende O als Quellpunkt!]

(c) Verallgemeinere die Lösung, das heißt, entwickle eine Formel für das Volumen des Tetraeders, der durch die drei Spurpunkte der Ebene $e: \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$ und dem Ursprung gebildet wird. Wähle eine passende Voraussetzung, die die Existenz der drei Spurpunkte sichert.

Übung 23.8

Gegeben sind die Ebene $e: \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} - 7 = 0$ sowie die drei Geraden

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass sich die drei Geraden g, h und k in einem Punkt S schneiden, der außerhalb der Ebene e liegt.

(b) Zeige, dass die drei Geraden g, h und k die Ebene e in jeweils genau einem Punkt G, H beziehungsweise K durchstoßen und berechne die Koordinaten dieser Durchstoßpunkte.

(c) Berechne den Rauminhalt des Tetraeders $\langle SGHK\rangle$.

Übung 23.9

Gegeben ist ein Tetraeder $\langle ABCD\rangle$ durch A = (–1; –3; 2), B = (5; –7; 0), C = (8; 1; 3), D = (6; –1; –3).

(a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\langle ABC\rangle$ und den Abstand d(D; ABC) des Punktes D von der Dreiecksebene ABC.

(b) Zeige, dass $\hat{v}\langle ABCD\rangle = \frac{1}{3} \cdot \hat{a}\langle ABC\rangle \cdot d\left(D\,;\,ABC\right)$ gilt.

Übung 23.10

Gegeben seien eine Ebene ABC durch drei nicht kollineare Punkte A, B, C sowie eine Gerade $g: \vec{X} = \vec{D} + \lambda\,\vec{w}$, die parallel zu ABC verlaufe.

Zeige, dass alle Tetraeder, die die Grundfläche $\langle ABC\rangle$ und als Spitze einen Punkt $X \in g$ besitzen, denselben Rauminhalt haben.