Übung 23.1

(a) $\hat{v}\langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\rangle = \left|\left(\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\1\\8\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}6\\0\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-31\\-13\\-10\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}6\\0\\1\end{pmatrix}\right| = 196$

(b) $\langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle R, \vec{w}, -\vec{v}, -\vec{u}\rangle$

(c) $\hat{v}\langle R, \vec{w}, -\vec{v}, -\vec{u}\rangle = \left|\left(\begin{pmatrix}6\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-1\\-8\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\51\\-6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}\right| = 196$

Übung 23.2

Ist $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$, so gilt $\overrightarrow{P'Q'} = -\vec{P'} + \vec{Q'} = -\vec{P} - \vec{s} + \vec{Q} + \vec{s} = \overrightarrow{PQ} = \vec{u}$

Genauso ergibt sich aus $\overrightarrow{PS} = \vec{v}$ sofort $\overrightarrow{P'S'} = \overrightarrow{PS} = \vec{v}$.

sowie aus $\overrightarrow{PT} = \vec{w}$ sofort $\overrightarrow{P'T'} = \overrightarrow{PT} = \vec{w}$

Also hat der verschobene Quader die gleichen Erzeuger $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ wie der ursprüngliche Quader. Gemäß (23.2) gilt:

$\hat{v}\langle P', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\rangle = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \hat{v}\langle P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\rangle$

Übung 23.3

(a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\-4\\6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}9\\1\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}10\\74\\41\end{pmatrix}$;

$ABC: \begin{pmatrix}10\\74\\41\end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix}10\\74\\41\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix}10\\74\\41\end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 11 = 0$

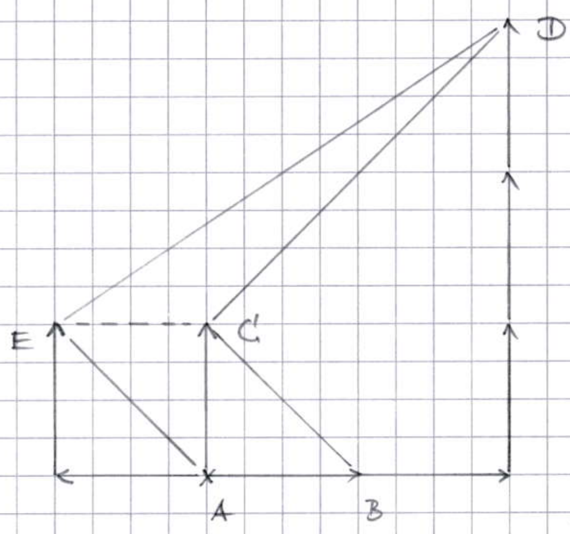
$D \in ABC \iff \begin{pmatrix}10\\74\\41\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}34\\-5\\1\end{pmatrix} - 11 = 0 \iff 11 - 11 = 0$ [wahr]

$E \in ABC \iff \begin{pmatrix}10\\74\\41\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\5\\-9\end{pmatrix} - 11 = 0 \iff 11 - 11 = 0$ [wahr]

(b) Über die Parametergleichung von ABC erhält man

$\vec{D} = \vec{A} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} + 3 \cdot \overrightarrow{AC}$ und $\vec{E} = \vec{A} + (-1) \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$

Daraus ergibt sich eine affine Skizze des Fünfecks:



Triangulierung der Grundfläche:

$\langle ABCDE \rangle =$

$\langle ABC \rangle \cup \langle CDE \rangle \cup \langle EAC \rangle$

$\hat{a}\langle ABC \rangle = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \times \vec{AC} \| = \frac{1}{2}\sqrt{7257}$

$$\hat{a}\langle CDE \rangle = \frac{1}{2} \| \vec{CD} \times \vec{CE} \| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 28 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 20 \\ 148 \\ 82 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{29028}$$

$$\hat{a}\langle EAC \rangle = \frac{1}{2} \| \vec{EA} \times \vec{EC} \| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 10 \\ +74 \\ 41 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{7257}$$

(c) $\vec{v}\langle A, \vec{AB}, \vec{AC}, -\vec{A} \rangle = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 74 \\ 41 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{11}{6}$

$\vec{v}\langle C', \vec{CD}, \vec{CE}, -\vec{C} \rangle = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 20 \\ 148 \\ 82 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{22}{6}$

$\vec{v}\langle E, \vec{EA}, \vec{EC}, -\vec{E} \rangle = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 74 \\ 41 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = \frac{11}{6}$

Das Volumen der Pyramide beträgt $\frac{44}{6} = 7\frac{2}{3}$

(d) Gegenprobe:

Der Abstand vom Ursprung O zur Ebene ABC beträgt

$$d(O, ABC) = \frac{|-11|}{\sqrt{7257}}.$$

$$\hat{v}\langle ABCDE \rangle = \frac{1}{6}\left(\hat{a}\langle ABC \rangle + \hat{a}\langle CDE \rangle + \hat{a}\langle EAC \rangle\right) \cdot d(O, ABC)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\sqrt{7257} + \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 7257} + \frac{1}{2}\sqrt{7257}\right) \cdot \frac{11}{\sqrt{7257}} = \frac{44}{6} = 7\frac{2}{3}$$

Übung 23.4

Bei den folgenden Rechnungen werden die Symmetrien des regelmäßigen Oktaeders ausgenutzt.

(a) $\overrightarrow{x^*y} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$; $\|\overrightarrow{x^*y}\| = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

Der Oktaeder besitzt 12 gleich lange Kanten.

Die Summe der Längen aller Kanten beträgt daher $12a\sqrt{2}$.

(b) $\overrightarrow{x^*z} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{x^*y} \times \overrightarrow{x^*z} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \\ a^2 \end{pmatrix}$; $\hat{a}\langle x^*yz\rangle = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{x^*y} \times \overrightarrow{x^*z}\|$

$$= \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$$

Der Oktaeder besitzt 8 gleich große Seiten

Die Summe der Flächeninhalte seiner Seiten beträgt daher $4a^2\sqrt{3}$

(c) $\overrightarrow{x^*z'} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$; $\hat{v}\langle x^*; \overrightarrow{x^*z'}; \overrightarrow{x^*z}; \overrightarrow{x^*y}\rangle = \left[\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{6}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2a^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}a^3$$

Der Oktaeder ist aus vier gleich großen Tetraedern zusammengesetzt.

Sein Volumen beträgt daher $\frac{4}{3}a^3$.

(d) In dem Wikipedia-Artikel wird die Kantenlänge a verwendet.

Diese Übung legt den Oktaeder aber so in das Koordinatensystem, dass die Kantenlänge $a\sqrt{2}$ entsteht (s. Teilaufgabe (a)).

Ersetzen wir in allen drei Lösungen $a\sqrt{2}$ durch a erhalten wir:

Summe der Kantenlängen $12a\sqrt{2} \to 12a$

Summe der Flächeninhalte $4a^2\sqrt{3} \to 4\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$

Volumen $\frac{4}{3}a^3 \to \frac{4}{3}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{2}{3\sqrt{2}}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$

Damit sind die Angaben in der Wikipedia bestätigt.

(e) Wir berechnen den Winkel zwischen der Seitenfläche <x⁺yz> und der Seitenfläche <x⁺yz'>.

Normalenvektor von x^+yz: $\overrightarrow{x^+y} \times \overrightarrow{xz} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \\ a^2 \end{pmatrix}$; $\vec{n_1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von x^+yz': $\overrightarrow{x^+y} \times \overrightarrow{xz'} = \begin{pmatrix} -a^2 \\ -a^2 \\ a^2 \end{pmatrix}$; $\vec{n_2} := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\sphericalangle(\vec{n_1}; \vec{n_2}) = \arccos\left(\frac{-1-1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109{,}4712^\circ$$

Gemäß §20 werden für zwei Ebenen keine stumpfen Schnittwinkel angegeben. Also gilt eigentlich $\sphericalangle(x^+yz, x^+yz') = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

Das ist aber bezogen auf den Oktaeder nicht der innere stumpfe Winkel zwischen den Seitenflächen, sondern der spitze Außenwinkel.

(f) Wir berechnen den Winkel zwischen der Grundflächenebene $x^+z'z$ und der Seitenflächenebene x^+yz.

$x^+z'z$ besitzt den Normalenvektor $\vec{n_3} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\sphericalangle(\vec{n_3}, \vec{n_1}) = \arccos\left(\frac{0+1+0}{1\cdot\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54{,}7356^\circ$$

Übung 23.5

(b) (1) $[\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}] = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} \overset{\text{Antisymmetrie des Vektorprodukts}}{=} (-\vec{v}\times\vec{u})\cdot\vec{w} = -(\vec{v}\times\vec{u})\cdot\vec{w} = -[\vec{v}\,\vec{u}\,\vec{w}]$

(2) & (3) $[\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}] \underset{(a)}{=} [\vec{w}\,\vec{u}\,\vec{v}] \underset{(b)(1)}{=} -[\underbrace{\vec{u}\,\vec{w}}_{(3)}\,\vec{v}] \underset{(a)}{=} -[\vec{w}\,\underbrace{\vec{v}\,\vec{u}}_{(2)}]$

(c) $\lambda[\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}] = \lambda(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = (\lambda(\vec{u}\times\vec{v}))\cdot\vec{w} = (\lambda\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = [\lambda\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}]$

$\sim \quad = (\lambda(\vec{u}\times\vec{v}))\cdot\vec{w} = (\vec{u}\times\lambda\vec{v})\cdot\vec{w} = [\vec{u}\,\lambda\vec{v}\,\vec{w}]$

$\sim \quad = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\lambda\vec{w}) = [\vec{u}\,\vec{v}\,\lambda\vec{w}]$

(d) $[(\vec{u}+\vec{x})\,\vec{v}\,\vec{w}] = ((\vec{u}+\vec{x})\times\vec{v})\cdot\vec{w} = (\vec{u}\times\vec{v} + \vec{x}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

$= (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} + (\vec{x}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = [\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}] + [\vec{x}\,\vec{v}\,\vec{w}]$

(analog für die beiden anderen Positionen)

Übung 23.6

Wir betrachten den Tetraeder $\langle ABCD \rangle$ als $\langle C, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA} \rangle$, wenn wir als Quellpunkt den Eckpunkt C und als Grundfläche die Dreiecksfläche $\langle CDB \rangle$ wählen.

$$\hat{v}\langle ABCD \rangle = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{CD}\ \overrightarrow{CB}\ \overrightarrow{CA} \right] \right|$$

$$\left[\overrightarrow{CD}\ \overrightarrow{CB}\ \overrightarrow{CA} \right] = \left[(\vec{D}-\vec{C})(\vec{B}-\vec{C})(\vec{A}-\vec{C}) \right]$$

Unter Anwendung des Distributivgesetzes (23.5)(d) und unter Weglassen aller Terme, in denen $\vec{C}$ doppelt auftritt, erhalten wir:

$$\left[\overrightarrow{CD}\ \overrightarrow{CB}\ \overrightarrow{CA} \right] = \left[\vec{D}\,\vec{B}\,\vec{A}\right] - \left[\vec{C}\,\vec{B}\,\vec{A}\right] - \left[\vec{D}\,\vec{C}\,\vec{A}\right] - \left[\vec{D}\,\vec{B}\,\vec{C}\right]$$

(23.5)(a)(b) :
$$= -\left[\vec{D}\,\vec{A}\,\vec{B}\right] + \left[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}\right] + \left[\vec{A}\,\vec{C}\,\vec{D}\right] - \left[\vec{B}\,\vec{C}\,\vec{D}\right]$$

$$= \left[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}\right] - \left[\vec{D}\,\vec{A}\,\vec{B}\right] + \left[\vec{A}\,\vec{C}\,\vec{D}\right] - \left[\vec{B}\,\vec{C}\,\vec{D}\right]$$

Beweis (23.14) :
$$= -\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD} \right]$$

Damit ist auch bei der Wahl des Quellpunktes C und der Grundfläche $\langle CBD \rangle$ die Gültigkeit der folgenden Formel gesichert:

$$\hat{v}\langle ABCD \rangle = \frac{1}{6} \left| \left[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}\right] - \left[\vec{D}\,\vec{A}\,\vec{B}\right] + \left[\vec{C}\,\vec{D}\,\vec{A}\right] - \left[\vec{B}\,\vec{C}\,\vec{D}\right] \right|$$

Übung 23.7

Koordinatenachsen: $x: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $y: \vec{x} = \mu \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $z: \vec{x} = \nu \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} \cdot \left[\lambda \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] - 12 = 0 \iff \lambda - 12 = 0 \iff \lambda = 12 \quad ; \quad \vec{A} = \begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} \cdot \left[\mu \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] - 12 = 0 \iff -4\mu - 12 = 0 \iff \mu = -3 \quad ; \quad \vec{B} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} \cdot \left[\nu \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] - 12 = 0 \iff 3\nu - 12 = 0 \iff \nu = 4 \quad ; \quad \vec{C} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$\hat{v}\langle ABCO\rangle = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{OA}\ \vec{OB}\ \vec{OC}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}\right]\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\-36\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right| = \frac{144}{6} = 24$$

(c) Gelte $\vec{n} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ mit $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$\vec{n}\cdot\left[\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] - \gamma = 0 \iff \lambda = \frac{\gamma}{n_1}$; $A = \left(\frac{\gamma}{n_1}; 0; 0\right)$

$\vec{n}\cdot\left[\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] - \gamma = 0 \iff \mu = \frac{\gamma}{n_2}$; $B = \left(0; \frac{\gamma}{n_2}; 0\right)$

$\vec{n}\cdot\left[\nu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] - \gamma = 0 \iff \nu = \frac{\gamma}{n_3}$; $C = \left(0; 0; \frac{\gamma}{n_3}\right)$

$$\hat{v}\langle ABCO\rangle = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}\right]\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix}\gamma/n_1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\\gamma/n_2\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{\gamma}{n_3}\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\\gamma^2/n_1n_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\gamma/n_3\end{pmatrix}\right|\cdot\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left|\frac{\gamma^3}{n_1n_2n_3}\right| = \left|\frac{\gamma^3}{6n_1n_2n_3}\right|$$

Wir prüfen die Formel mit den Daten der Teilaufgaben (a) und (b):

$\hat{v}\langle ABCO\rangle = \left|\frac{12^3}{6\cdot1\cdot(-4)\cdot3}\right| = \frac{12^2}{6} = 24$; das ist korrekt.

<u>Übung 23.8</u>

Schnittpunktansatz für g und h:

$$\begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix} \iff \lambda\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-1\\4\end{pmatrix}$$

(1) $-3\lambda - 5\mu = -4$

(2) $\mu = -1$

[(3) $2\lambda + 2\mu = 4$]

(2) → (1): $-3\lambda + 5 = -4 \iff \lambda = 3$ [4]

(4),(4) → (3): $2\cdot3 + 2\cdot(-1) = 4 \iff 6 - 2 = 4$ [wahr]

$$\vec{S} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$$

$$S \in k \Leftrightarrow \exists \nu \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists \nu: \begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$$

Offenbar erfüllt $\nu = -1$ die Gleichung. Also liegt S auch auf k.

$$S \in e \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix} - 7 = 0 \Leftrightarrow -1-7=0 \text{ [falsch]}; \quad S \notin e.$$

(b) $$\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} \right] - 7 = 0 \Leftrightarrow -7 + 2\lambda - 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 7$$

$$\vec{G} = \begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\2\\13\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix} \right] - 7 = 0 \Leftrightarrow 0 + \mu - 7 = 0 \Leftrightarrow \mu = 7$$

$$\vec{H} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}37\\-6\\-11\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix} \right] - 7 = 0 \Leftrightarrow -14 - 13\nu - 7 = 0 \Leftrightarrow \nu = -\frac{21}{13}$$

$$\vec{K} = \begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix} - \frac{21}{13} \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-47/13\\-6/13\\73/13\end{pmatrix}$$

$$\vec{SG} = \begin{pmatrix}-12\\0\\8\end{pmatrix}; \quad \vec{SH} = \begin{pmatrix}40\\-8\\-16\end{pmatrix}; \quad \vec{SK} = \begin{pmatrix}-8/13\\-32/13\\8/13\end{pmatrix}$$

(c) $$V\langle SGHK\rangle = \frac{1}{6} \left| \left(\begin{pmatrix}-12\\0\\8\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}40\\-8\\-16\end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix}-8/13\\-32/13\\8/13\end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix}64\\128\\96\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-8/13\\-32/13\\8/13\end{pmatrix} \right| \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{13} \cdot 3840 \cdot \frac{1}{6} = \boxed{49\,3/13}$$

Übung 23.9

(a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -24 \\ 60 \end{pmatrix}$

$$ABC: \begin{pmatrix} 4 \\ -24 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -24 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 4 \\ -24 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 188 = 0$$

$$\hat{a}\langle ABC\rangle = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \| = \frac{1}{2}\sqrt{4192}$$

$$d(D, ABC) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -24 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - 188 \right|}{\sqrt{4192}} = \frac{320}{\sqrt{4192}}$$

(b) $$\frac{1}{3} \cdot \hat{a}\langle ABC\rangle \cdot d(D, ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 320 = \frac{160}{3} = 53\frac{1}{3}$$

$$\hat{v}\langle ABCD\rangle = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}] \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -24 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot 320 = 53\frac{1}{3}$$

Übung 23.10

$$ABC: (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \vec{x} - (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \vec{A} = 0$$

Da $g \parallel ABC$ gelten soll, ist $\vec{w}$ ein Richtungsvektor von ABC.

Also gilt $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \vec{w} = 0$.

Ist $x \in g$, so gilt $\overrightarrow{AX} = -\vec{A} + \vec{x} = -\vec{A} + \vec{D} + \lambda \vec{w} = \overrightarrow{AD} + \lambda \vec{w}$

Damit folgt:

$$\hat{v}\langle ABCX\rangle = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AX}] \right| = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ (\overrightarrow{AD} + \lambda \vec{w})] \right|$$

Mit den Rechenregeln des Spatprodukts folgt:

$$\hat{v}\langle ABCX\rangle = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}] + \lambda [\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \vec{w}] \right|$$

Da $[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \vec{w}] = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \vec{w} = 0$ gilt, erhalten wir

$$\hat{v}\langle ABCX\rangle = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}] \right| \quad \forall x \in g.$$