



§22 Vektorprodukt und Flächenberechnung

Abschnitt 1: Das Vektorprodukt

Ausgangspunkt für die Untersuchungen ist die bereits bekannte Definition aus dem Paragraphen §15:

(15.16) Definition

Für je zwei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ heißt der Vektor $\vec{u} \times \vec{v} := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$ Vektorprodukt der Vektoren \vec{u} und \vec{v} .

Es sei daran erinnert, dass diese Verknüpfung von Vektoren aus der Suche nach einem Vektor hervorgegangen ist, der zu zwei vorgegebenen Vektoren orthogonal ist.

(15.15) Satz

Sind \vec{u} und \vec{v} zwei Vektoren, so ist der Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ sowohl orthogonal zum Vektor \vec{u} als auch orthogonal zum Vektor \vec{v} .

Eine der wichtigsten Aussagen zum Vektorprodukt sei ebenfalls in Erinnerung gerufen:

(15.17) Satz

Seien \vec{u} und \vec{v} zwei Vektoren.

Ihr Vektorprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$ ist genau dann der Nullvektor, wenn \vec{u} und \vec{v} linear abhängig sind.

Für weitergehende Untersuchungen, insbesondere zum Betrag des Vektorprodukts, werden nachfolgend grundlegende Rechenregeln zusammengestellt.

(22.1) Rechenregeln

Seien \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} drei Vektoren sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Dann gilt:

- (1) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ (Anti-Kommutativgesetz)
- (2) $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \times \vec{v})$ (Gemischt assoziatives Gesetz)
- (3) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ (Distributivgesetz)

Die Beweise der Regeln erfolgen unter Anwendung der Definition (15.16) durch direktes Ausrechnen. Sie werden dem Leser zur Übung überlassen. Regel (2) gestattet übrigens den sparsamen Umgang mit Klammern im Zusammenhang mit Termen, in denen Vektorprodukte auftreten.

Wie beim Skalarprodukt muss vor einer Annahme des Assoziativgesetzes gewarnt werden:

(22.2) Bemerkung

Im allgemeinen ist für drei Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} die Gleichung

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$$

nicht erfüllt.

Gegenbeispiel:

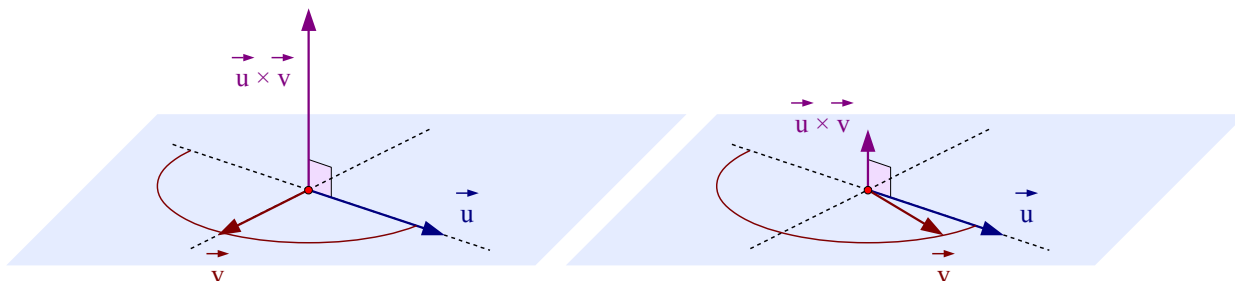
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [\text{Ausführung durch den Leser!}]$$



Im Folgenden soll der Betrag des Vektorprodukts erfasst werden. Dazu werden heuristische Überlegungen angestellt.

Offenbar ist zu erwarten, dass der Betrag des Vektorprodukts $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ von den Beträgen der Faktoren $\|\vec{u}\|$ und $\|\vec{v}\|$ abhängt. Wegen des Satzes (15.17), der eingangs nochmals zitiert wurde, ist außerdem damit zu rechnen, dass der Winkel $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ eine Rolle spielt.

Zur Veranschaulichung des Sachverhalts wählen wir zwei vom Nullvektor verschiedene, linear unabhängige Vektoren und \vec{u} und \vec{v} .



Aus ihrer Unabhängigkeit folgt $\|\vec{u} \times \vec{v}\| \neq 0$. „Drehen“ wir aber den Vektor \vec{v} , ohne dessen Betrag zu verändern, so weit, dass sich $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$ ergibt, dann werden die Vektoren \vec{u} und \vec{v} linear abhängig, und es folgt $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 0$.

Weil die Koordinaten des Vektorprodukts $\vec{u} \times \vec{v}$ stetige Ausdrücke der Koordinaten der Faktoren \vec{u} und \vec{v} sind, muss bei dem beschriebenen Drehvorgang der Betrag des Vektorprodukts $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ auch stetig gegen 0 schrumpfen.

Wird die Drehung des Vektors \vec{v} mit entgegengesetzter Drehrichtung so ausgeführt, dass sich $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$ ergibt, werden die Vektoren \vec{u} und \vec{v} wiederum linear abhängig, und es folgt ebenfalls $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 0$. Nun zeigt aber der Vektor \vec{v} in die entgegengesetzte Richtung.

Also ist damit zu rechnen, dass es eine Zwischenlage gibt, in der der Betrag des Vektorprodukts maximal wird. Es ist naheliegend zu vermuten, dass das der Fall ist, wenn die Vektoren \vec{u} und \vec{v} orthogonal sind, weil Orthogonalität, salopp ausgedrückt, „maximale lineare Unabhängigkeit“ bedeutet.

Dieser Sachverhalt wird bereits durch folgenden Hilfssatz grob wiedergegeben. Schauen wir genau hin, erkennen wir die Cauchy-Schwartzsche Ungleichung (14.15) in neuem Gewand!

(22.3) Lemma („Cauchy-Schwartzsche Identität“)

Sind \vec{u} und \vec{v} zwei Vektoren. Dann gilt:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \quad [\Leftrightarrow (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\vec{u} \times \vec{v})^2 = \vec{u}^2 \vec{v}^2]$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} \times \vec{v})^2 = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \\ &= u_2^2 v_3^2 - 2 u_2 v_3 u_3 v_2 + u_3^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 - 2 u_1 v_3 u_3 v_1 + u_3^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 - 2 u_1 v_2 u_2 v_1 + u_2^2 v_1^2 \\ &= (u_1^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2) - 2(u_1 v_1 u_2 v_2 + u_1 v_1 u_3 v_3 + u_2 v_2 u_3 v_3) \\ \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 \vec{v}^2 - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \\ &= (u_1^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2) \\ &\quad - (u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2 + 2 u_1 v_1 u_2 v_2 + 2 u_1 v_1 u_3 v_3 + 2 u_2 v_2 u_3 v_3) \\ &= (u_1^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2) - 2(u_1 v_1 u_2 v_2 + u_1 v_1 u_3 v_3 + u_2 v_2 u_3 v_3) \end{aligned}$$

Die beiden Seiten der im Lemma formulierten Gleichung stimmen überein. Das war zu zeigen.



Aus dem Hilfssatz erhalten wir einerseits einen einfachen Zusammenhang zwischen dem Betrag des Vektorprodukts und den Beträgen der am Produkt beteiligten Vektoren, wenn diese orthogonal sind:

(22.4) Bemerkung

Sind \vec{u} und \vec{v} zwei Vektoren. Dann gilt: $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Andererseits erhalten wir im Allgemeinen:

(22.5) Satz

Sind \vec{u} und \vec{v} zwei Vektoren. Dann gilt: $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cdot \sin(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}))$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})))^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}))) = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})) \end{aligned}$$

Weil für alle Vektoren \vec{u} und \vec{v} die Einschränkung $0^\circ \leq \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$ gewährleistet ist, gilt stets

$$\sin(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})) \geq 0$$

Also kann auf beiden Seiten der Gleichung

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}))$$

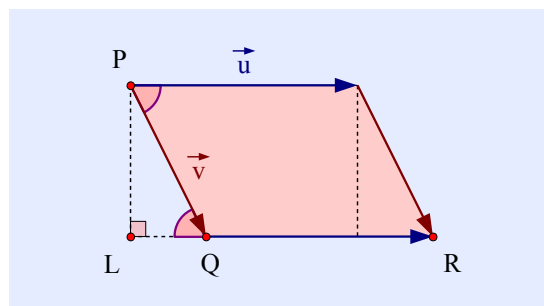
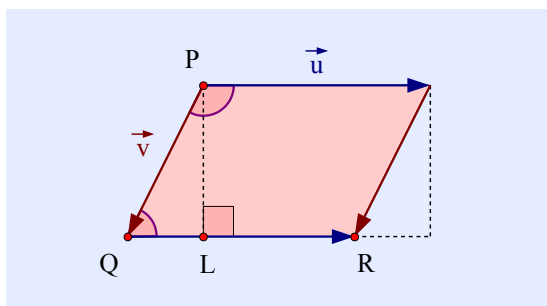
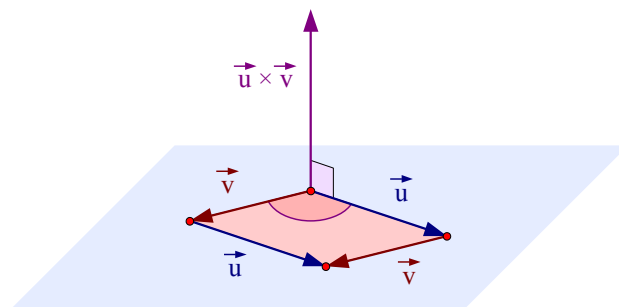
ohne Schwierigkeiten die Wurzel gezogen werden. Das ergibt die Behauptung.

Im Anschauungsraum bedeutet Satz (22.5), dass der Betrag des Vektorproduktes $\vec{u} \times \vec{v}$ mit dem Flächeninhalt des Parallelogramms übereinstimmt, das die Repräsentanten der am Produkt beteiligten Vektoren \vec{u} und \vec{v} ausgehend von einem gemeinsamen Anfangspunkt aufspannen.

Zur Begründung dieser Deutung sei P der Anfangspunkt der Repräsentanten der Vektoren \vec{u} und \vec{v} .

Die Punkte Q und R seien so gewählt, dass $\vec{v} = \vec{PQ}$ und $\vec{u} = \vec{QR}$ gilt.

Den Punkt L konstruieren wir schließlich als Lotfußpunkt von P auf der Geraden QR.



Gilt wie im linken Schaubild $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) > 90^\circ$, dann folgt $\sphericalangle(LQP) = 180^\circ - \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$. [Nachbarwinkel an ||]

Damit erhalten wir $PL = \|\vec{v}\| \sin(180^\circ - \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}))$.

Da aber die Identität $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$ allgemeingültig ist, folgt sofort $PL = \|\vec{v}\| \sin(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}))$

Gilt wie im rechten Schaubild $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) < 90^\circ$, dann folgt $\sphericalangle(PQL) = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$. [Wechselwinkel an ||]

Wir erhalten wiederum $PL = \|\vec{v}\| \sin(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}))$.



Sind die beiden Vektoren \vec{u} und \vec{v} orthogonal, fallen die Punkte Q und L zusammen.

Weil $\sin(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})) = \sin(90^\circ) = 1$ gilt, folgt auch hier $\overline{PL} = \overline{PQ} = \|\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \cdot 1 = \|\vec{v}\| \sin(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}))$

Also beträgt der Flächeninhalt des von den Repräsentanten aufgespannten Parallelogramms unabhängig von der Größe des Winkels zwischen den am Produkt beteiligten Vektoren

$$\overline{QR} \cdot \overline{PL} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}))$$

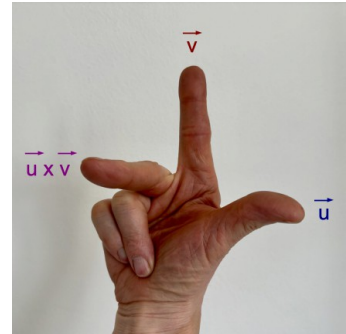
Alle Pfeile, die zu einer durch einen Vektor induzierten Verschiebung gehören, weisen nicht nur gleiche Länge, sondern auch gleiche Richtung und gleiche Orientierung auf.

Zur Richtung der zum Vektorprodukt gehörenden Pfeile ist nichts mehr zu sagen, weil ja das Vektorprodukt orthogonal zu seinen Vektorfaktoren konstruiert ist. Dadurch ist die Richtung der zugehörigen Pfeile eindeutig festgelegt.

Bezüglich der Orientierung wollen wir es im Rahmen unserer Theorie bei der schlichten Feststellung belassen, dass die Vektoren \vec{u} , \vec{v} und $\vec{u} \times \vec{v}$ immer – wie die Achsen eines kartesischen Koordinatensystems (siehe §1, Abschnitt B) – ein Rechtssystem bilden, wenn die Vektorfaktoren linear unabhängig sind:

Hält man die rechte Hand so, dass der Daumen Richtung und Orientierung des ersten Vektors \vec{u} sowie der Zeigefinger Richtung und Orientierung des zweiten Vektors \vec{v} wiedergibt, so besitzt $\vec{u} \times \vec{v}$ Richtung und Orientierung des rechtwinklig dazu gestreckten Mittelfingers.

Eine exakte mathematische Fassung dieses Phänomens erfordert einen größeren Aufwand, der sich im Rahmen dieser Abhandlung nicht rechtfertigen lässt.



Dem aufmerksamen Leser ist sicher aufgefallen dass der Ausdruck $\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ uns bereits einmal über den Weg gelaufen ist. Wir zitieren:

(18.14) Abstandsformel

Sei $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ eine Gerade, Q ein Punkt des Modellraumes. Dann gilt:

$$d(Q, g) = \frac{\sqrt{\vec{u}^2 (\overline{AQ})^2 - (\vec{u} \cdot \overline{AQ})^2}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{\|\vec{u}\|^2 \|\overline{AQ}\|^2 - |\vec{u} \cdot \overline{AQ}|^2}}{\|\vec{u}\|}$$

Unter Verwendung von Lemma (22.3) ergibt sich daraus sofort

(22.6) Neufassung der Abstandsformel („Plückersche Abstandsformel“¹)

Sei $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ eine Gerade, Q ein Punkt des Modellraumes. Dann gilt:

$$d(Q, g) = \frac{\|\vec{u} \times \overline{AQ}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Verblüffend ist die typographische Ähnlichkeit der Plückerschen Abstandsformel mit der Hesseschen Abstandsformel! So wie die Hesseschen Abstandsformel mit einer parameterfreien Darstellung der Ebenengleichung korrespondierte, steht die Plückersche Abstandsformel in Verbindung mit einer parameterfreien Darstellung der Geradengleichung; diese ist allerdings für die praktische Arbeit von geringerer Bedeutung.

(22.7) Satz („Plücker-Gleichung“)

Gegeben sei eine Gerade $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$. Dann gilt für jeden Punkt X des Modellraumes:

$$X \in g \Leftrightarrow \vec{u} \times \overline{AX} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \times (\vec{X} - \vec{A}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{X} - \vec{u} \times \vec{A} = \vec{0}$$

Beweis:

$$X \in g \Leftrightarrow \overline{AX} \text{ ist Richtungsvektor von } g \Leftrightarrow \vec{u} \text{ und } \overline{AX} \text{ sind linear abhängig} \Leftrightarrow \vec{u} \times \overline{AX} = \vec{0}$$

1 https://de.wikipedia.org/wiki/Julius_Plücker



Die Behauptung des Satzes hätte auch aus der Plücker'schen Abstandsformel abgeleitet werden können. Wir haben aber bewusst auf Satz (15.17) zurückgegriffen, um zu zeigen, wie gut die theoretischen Enden zusammenpassen.

(22.8) Definition

Gegeben sei eine Gerade $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$.

Dann wird die Gleichung $\vec{u} \times \vec{X} - \vec{u} \times \vec{A} = \vec{0}$ als *Plücker-Gleichung* der Geraden oder auch als *Plücker'sche Form der Geradengleichung* bezeichnet.

Notieren wir eine lineare Gleichung $ax + by + cz = d$ in den Variablen x, y und z , so sind wir uns sicher, dass diese Gleichung eine Ebene des Modellraumes \mathbb{R}^3 beschreibt, falls wenigstens einer der drei Koeffizienten a, b oder c von null verschieden ist.

Bei einer Vektor-Gleichung in der Plücker-Form $\vec{u} \times \vec{X} - \vec{b} = \vec{0}$ in der Vektorvariablen \vec{X} ist diese Sicherheit nicht angebracht. Damit eine Plücker'sche Geradengleichung vorliegt, muss der Vektor \vec{b} gemäß Definition (22.8) das Vektorprodukt aus dem Richtungsvektor \vec{u} und dem Ortsvektor eines Stützpunktes A sein. Das bedeutet aber, dass der Vektor \vec{b} orthogonal zum Vektor \vec{u} sein muss!

(22.9) Bemerkung

Seien \vec{u} und \vec{b} zwei Vektoren des Modellraumes, wobei \vec{u} vom Nullvektor verschieden sei.

Dann ist die Gleichung $\vec{u} \times \vec{X} - \vec{b} = \vec{0}$ genau dann eine Plücker-Gleichung einer Gerade g , wenn $\vec{u} \cdot \vec{b} = 0$ gilt.

Beweis:

„ \Rightarrow “:

Sei g die Gerade, die durch die Gleichung $\vec{u} \times \vec{X} - \vec{b} = \vec{0}$ beschrieben wird. A sei ein Punkt von g .

Weil die Gleichung $\vec{u} \times \vec{X} - \vec{b} = \vec{0}$ die Gerade g gemäß Definition (22.8) beschreiben soll, gilt $\vec{u} \times \vec{A} - \vec{b} = \vec{0}$ und daher $\vec{u} \times \vec{A} = \vec{b}$.

Aus Satz (15.15) folgt, dass der Vektor \vec{b} sowohl orthogonal zum Vektor \vec{u} als auch zum Vektor \vec{A} sein muss. Also gilt $\vec{u} \cdot \vec{b} = 0$.

„ \Leftarrow “:

Gelte nun $\vec{u} \cdot \vec{b} = 0$. Es ist zu zeigen, dass es einen Punkt A gibt, sodass $\vec{u} \times \vec{A} = \vec{b}$ gilt.

Wenn wir das gezeigt haben, beschreibt die Gleichung $\vec{u} \times \vec{X} - \vec{b} = \vec{0}$, die sich dann als $\vec{u} \times \vec{X} - \vec{u} \times \vec{A} = \vec{0}$ umschreiben lässt, die Gerade $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$.

Gelte $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Für den gesuchten Punkt A wählen wir den Ansatz $\vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Die Gleichung $\vec{u} \times \vec{A} = \vec{b}$ führt mit diesen Bezeichnungen auf ein lineares Gleichungssystem. Da \vec{u} vom Nullvektor verschieden sein soll, gehen wir o.B.d.A. (siehe Anmerkung unten) davon aus, dass $u_1 \neq 0$ gilt.

$$(1) \quad u_2 z - u_3 y = b_1$$

$$(2) \quad -(u_1 z - u_3 x) = b_2 \quad \Leftrightarrow \quad -u_1 z + u_3 x = b_2 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{u_3 x - b_2}{u_1}$$

$$(3) \quad u_1 y - u_2 x = b_3 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{u_2 x + b_3}{u_1}$$

Werden die Terme, die in Gleichung (2) und (3) für die Variablen z und y gewonnen wurden, in die Gleichung (1) eingesetzt, liefert die Gleichung (1) die Gleichung $\vec{u} \cdot \vec{b} = 0$. Wäre diese nicht als gültig vorausgesetzt worden, entstünde hier ein Widerspruch, der die Nichtlösbarkeit des Gleichungssystem anzeigt.

So aber kann für x ein beliebiger Wert, beispielsweise 0 gewählt werden. Die Gleichungen (2) und (3) liefern dann die beiden anderen Koordinaten des Stützpunktes A .

Gilt nicht $u_1 \neq 0$, sondern $u_2 \neq 0$ oder $u_3 \neq 0$, ist ein anderes Gleichungspaar für die Lösung auszuwählen.



Abschnitt 2: Flächenberechnung

Den Ausgangspunkt für die Flächenberechnung im Modellraum wird die anschauliche Interpretation des Betrags des Vektorprodukts bilden, die soeben im ersten Abschnitt vorgestellt wurde.

Zunächst werden wir aber die Prinzipien formulieren, auf denen die Flächenberechnung im Modellraum beruhen soll. Wir orientieren uns dabei an den Grundsätzen, auf denen die Flächenberechnung in der Euklidischen Mittelstufen-geometrie fußt. Die Formulierung der Prinzipien bereiten wir mit heuristischen Überlegungen vor.

Zuerst verschaffen wir uns Klarheit über das mathematische Wesen des *Flächenmaßes*. Im Anschauungsraum ist es eine Funktion, die Figuren nach gewissen Gesetzmäßigkeiten eine positive reelle Zahl zuordnet.

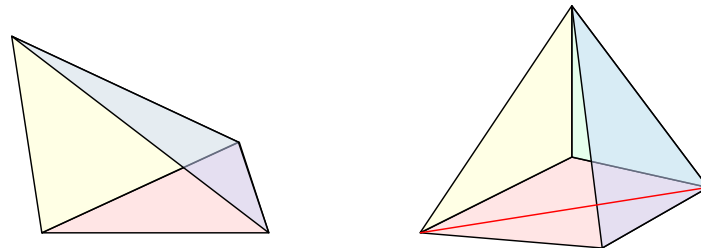
Auch im Modellraum soll das Flächenmaß \hat{a} (wie „area“, *lat.*, „Fläche“) eine Funktion sein, die „qualifizierten“ Punktmengen des Modellraumes eine nicht negative reelle Zahl als ihren *Flächeninhalt* zuordnet.

Als „qualifizierte“ Punktmengen, auf die das Flächenmaß anwendbar ist, lassen wir in dieser Abhandlung nur solche zu, die aus den Flächen endlich vieler triangulierbarer Polygone (vergleiche Definition (13.10)) „zusammengesetzt“ sind.

(22.10) Definition

Eine Punktmenge m des Modellraumes heiße *flächenmessbar*, wenn es n , ($n \in \mathbb{N}$), triangulierbare Polygone gibt, deren Flächen p_1, \dots, p_n folgende Eigenschaften besitzen:

- (1) Die Vereinigung aller n Polygonflächen ergibt die Punktmenge m : $m = p_1 \cup \dots \cup p_n$
- (2) Im Durchschnitt je zweier Polygonflächen liegen allenfalls Randpunkte der beiden Polygone.



Ein einfaches Beispiel für eine flächenmessbare Punktmenge ist die Oberfläche eines Tetraeders, die offensichtlich aus vier Dreiecksflächen besteht. Können wir erklären, was der Flächeninhalt einer Dreiecksfläche ist, sollte sich – so unsere Vorstellung – der Flächeninhalt der Oberfläche des Tetraeders als Summe der Flächeninhalte der vier Dreiecksflächen ergeben.

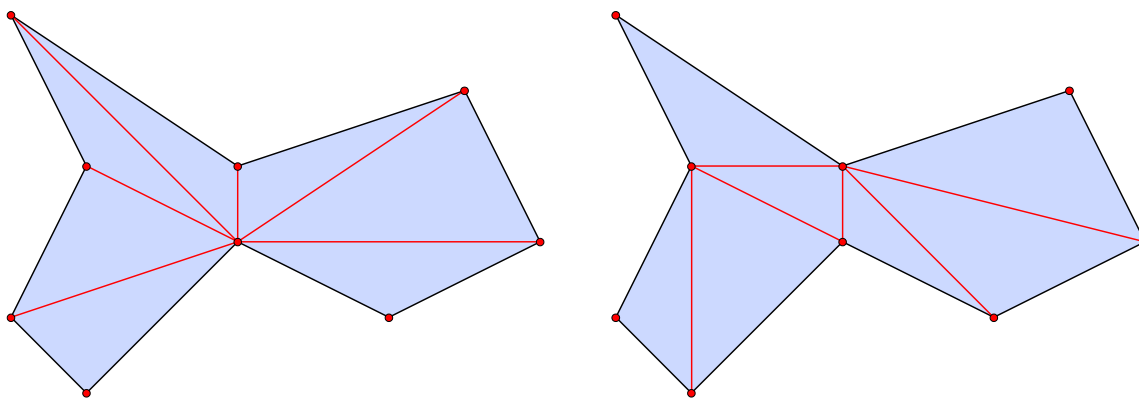
Damit zeichnet sich eine erste wesentliche Anforderung an das Flächenmaß ab: Es sollte „additiv“ funktionieren, das heißt, der Flächeninhalt der Vereinigung zweier disjunkten Punktmengen sollte mit der Summe der Flächeninhalte der beiden Punktmengen übereinstimmen. Das schließt den Wunsch ein, dass sich das Flächenmaß tolerant gegenüber dem Zerschneiden von Punktmengen durch Transversalen verhält.

Beispielsweise wird in der vorangehenden Abbildung die Grundfläche der vierseitigen Pyramide durch eine Diagonale in zwei Dreiecke geteilt. Das Flächenmaß wäre tolerant gegenüber dieser Triangulierung der Grundfläche, wenn der Flächeninhalt der Grundfläche mit der Summe der Flächeninhalte der beiden Teildreiecke übereinstimmt.

Aus diesem Gedanken ergibt sich sofort eine weitere Anforderung an das Flächenmaß, weil die beiden Teildreiecke der Pyramidengrundfläche nicht wirklich disjunkt sind. Ihr mengentheoretischer Durchschnitt besteht nämlich aus den Punkten der teilenden Diagonalen. Diese darf also beim Flächenmessen keine Rolle spielen, wenn das Flächenmaß sich additiv verhalten soll. Im Anschauungsraum ist ja auch der Flächeninhalt einer „Linie“ gleich null!

Bei unserer Überlegung zur „Additivität“ des Flächenmaßes waren wir soeben wie selbstverständlich davon ausgegangen, dass triangulierbare Polygone ebenso wie ihre Teildreiecke einen Flächeninhalt besäßen und dass es nur darauf ankomme, dass die Summe der Teile das Ganze ausmacht.

Wenn aber der Flächeninhalt eines (triangulierbaren) Polygons nicht „präexistent“ ist, sondern von uns erst als Summe der Flächeninhalte der Teildreiecke definiert würde, dann tut sich ein tiefes Problem auf! Wir erinnern uns, dass die Flächen triangulierbare Polygone in der Regel auf mehrere Weisen in Dreiecksflächen zerlegt werden können. Offensichtlich dürften wir nur dann von dem Flächeninhalt eines Polygons sprechen, wenn jede Triangulierung dieselbe Summe von Dreiecksflächeninhalten liefert.

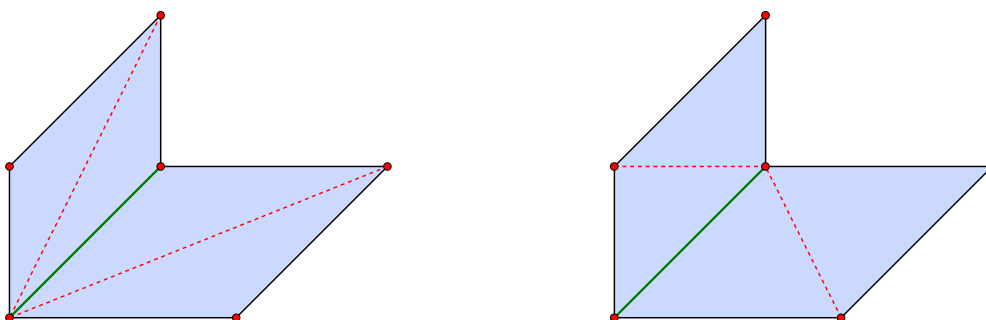


Ebenes Nonagon mit zwei verschiedenen Triangulierungen

Wir verdeutlichen den Gedanken noch einmal an dem Beispiel des abgebildeten Nonagons. Wenn wir seinen Flächeninhalt als Summe der Flächeninhalte von sieben Teildreiecke definieren wollen, dann dürfen alternative Triangulierungen nicht zu unterschiedlichen Ergebnissen führen!

Nehmen wir nun einmal an, dass wir das Flächenmaß so definieren können, dass es gleiche Summen für alternative Triangulierungen abwirft; dann müssen wir in diesem Zusammenhang noch kurz über „Raumknicke“ nachdenken.

Das folgende Beispiel verdeutlicht, was gemeint ist. Betrachtet wird ein Hexagon, das aus zwei Wänden eines Quaders besteht.



Nichtebenes Hexagon mit alternativen Triangulierungen der ebenen Bestandteile

Das Hexagon ist flächenmessbar im Sinne von Definition (22.10), weil es aus zwei triangulierbaren Vierecken besteht. Als ganzes ist das Hexagon aber nicht im Sinne der Definition (13.10) triangulierbar, weil es nicht eben ist. Es genügt nicht den Bedingungen der Definition (13.10)!

Der grün gezeichnete „Raumknicke“ ist in jeder Berechnung der Fläche des Hexagons als Fixum zu berücksichtigen. Eine alternative Triangulierung darf ihn nicht eliminieren. „Raumknicke“ sind unauflösbare Bestandteile einer jeden Zerlegung einer flächenmessbaren Punktmenge.

Wir übertragen nun aus der Euklidischen Geometrie – unter Berücksichtigung der heuristischen Vorüberlegungen – unsere Anforderungen an das Flächenmaß im Modellraum.

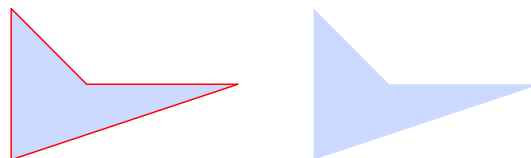
(22.11) Anforderungen an das Flächenmaß

- I Ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 besitzt den Flächeninhalt 1 („Normierung“).
- II Eine Strecke hat unabhängig von ihrer Länge den Flächeninhalt 0 („Dünne Menge“).
- III Sind m und n zwei disjunkte Punktmenge, so ist der Flächeninhalt der Vereinigung der Mengen die Summe ihrer Flächeninhalte: $\hat{a}(m \cup n) = \hat{a}(m) + \hat{a}(n)$ („Additivität“).
- IV Ist n eine Punktmenge, die durch eine Kongruenzabbildung (Spiegelung, Verschiebung, Drehung, ...) aus der Punktmenge m hervorgeht, dann gilt $\hat{a}(m) = \hat{a}(n)$ („Kongruenzinvarianz“).



Aus den Anforderung II und III lässt sich direkt ableiten, dass der Rand einer flächenmessbaren Punktmenge bei der Berechnung ihres Flächeninhalts nicht ins Gewicht fällt, da er als Vereinigung von Strecken dargestellt werden kann.

Wird der Rand einer Punktmenge ganz oder teilweise entfernt, oder werden zu einer randlosen Punktmenge Randstücke hinzugefügt, ändert sich ihr Flächeninhalt nicht.



Nachdem wir unsere Vorstellungen von den Gesetzmäßigkeiten eines Flächenmaßes formuliert haben, definieren wir in einem ersten Schritt das Flächenmaß für Parallelogramme im Modellraum durch folgende Setzung:

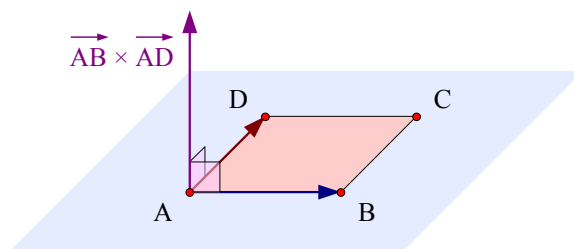
(22.12) Definition

Sei $\langle ABCD \rangle$ ein Parallelogramm im Modellraum.

Dann sei

$$\hat{a} \langle ABCD \rangle := \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\|$$

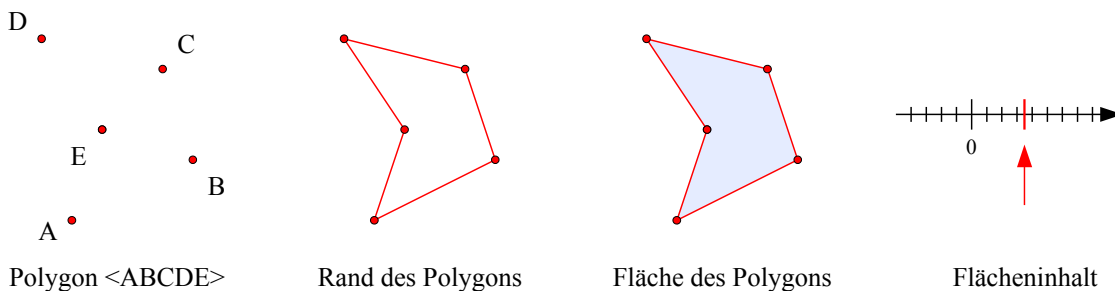
der *Flächeninhalt (der Fläche) des Parallelogramms*.



Diese Definition greift die anschauliche Deutung des Betrags des Vektorprodukts auf, die wir im Anschluss an Satz (22.5) entwickelt haben.

In dem Definitionstext deuten wir durch Klammern bereits an, dass wir uns die Sprech- und Schreibweise dadurch erleichtern wollen, dass wir von dem *Flächeninhalt des Polygons* reden, obwohl wir eigentlich den *Flächeninhalt der Fläche des Polygons* meinen. Zur Erinnerung:

- Ein n-seitiges Polygon ist (nur) eine zyklische Sequenz von n Punkten, den Eckpunkten des Polygons. (siehe Definition (7.1))
- Die *Fläche* eines (triangulierbaren) n-seitigen Polygons ist eine Punktmenge, die wir dem Polygon zuordnen. (siehe Definition (13.11))
- Das Flächenmaß misst nicht das Polygon, sondern seine Fläche!



Polygon $\langle ABCDE \rangle$

Rand des Polygons

Fläche des Polygons

Flächeninhalt

Wir stellen sofort sicher, dass die Definition des Flächeninhaltes nicht von der Wahl des Eckpunktes abhängt.

(22.13) Bemerkung

Ist $\langle ABCD \rangle$ ein Parallelogramm im Modellraum, so gilt

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CB}\| = \|\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}\|$$

Beweis:

Da $\langle ABCD \rangle$ ein Parallelogramm ist, gilt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Damit folgt:

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD} \times (-\overrightarrow{AB}) = -((-\overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CB} = (-\overrightarrow{AB}) \times (-\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC} = (-\overrightarrow{AD}) \times \overrightarrow{AB} = -(\overrightarrow{AB} \times (-\overrightarrow{AD})) = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$$



Wir überprüfen nun, inwieweit die in (22.11) formulierten Anforderungen erfüllt sind.

(22.14) Überprüfung I

Ist das Parallelogramm $\langle ABCD \rangle$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 1, so ist $\hat{a} \langle ABCD \rangle = 1$.

Beweis:

Nach Voraussetzung gilt $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AD}\| = 1$ und $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$.

Mit Bemerkung (22.4) folgt: $\hat{a} \langle ABCD \rangle = \|\vec{AB} \times \vec{AD}\| = \|\vec{AB}\| \|\vec{AD}\| = 1 \cdot 1 = 1$

Damit ist die Anforderung (22.11) I erfüllt. Für die Überprüfung der Anforderung (22.11) II verwenden wir die Tatsache, dass eine Strecke \overline{AB} und die Fläche des Parallelogramms ABBA als Punktmengen identisch sind.

(22.15) Überprüfung II

Ist \overline{AB} eine Strecke im Modellraum, so gilt $\hat{a}(\overline{AB}) = 0$.

Beweis:

$\hat{a}(\overline{AB}) = \hat{a} \langle ABBA \rangle = \|\vec{AB} \times \vec{AA}\| = \|\vec{AB} \times \vec{0}\| = \|\vec{0}\| = 0$

Im Modellraum \mathbb{R}^3 haben nun Parallelogramme einen Flächeninhalt. Unser Ziel ist es, alle triangulierbaren Polygone und über diese alle flächenmessbaren Punktmengen mit einem Flächeninhalt zu versehen. Auf dem Weg dorthin werden im nächsten Schritt Dreiecksflächen mit einem Flächeninhalt ausgestattet.

Dazu wird gezeigt, dass für ein Dreieck $\langle ABC \rangle$ der Ausdruck $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$ die alt bekannte Flächeninhaltsformel der Euklidischen Geometrie

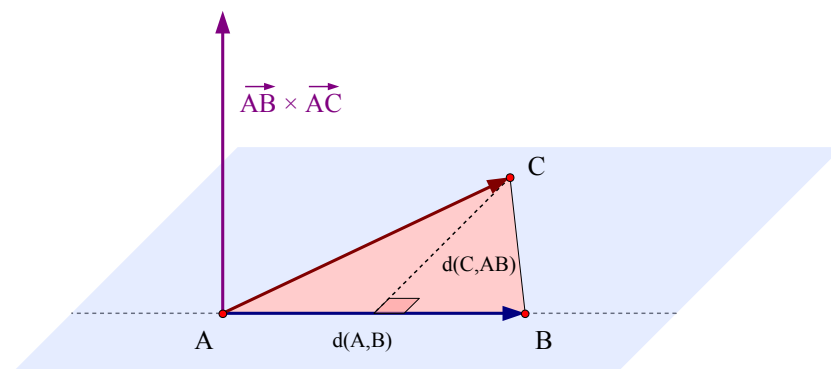
$$\text{Flächeninhalt eines Dreiecks} = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{zugehörige Höhe}$$

nachbildet.

(22.16) Satz

Gegeben seien im Modellraum drei paarweise verschiedene Punkte A, B und C. Dann gilt:

$$\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} d(A, B) \cdot d(C, AB)$$



Beweis:

Weil die Punkte A und B verschieden sind, ist die Gerade AB: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{AB}$ wohldefiniert.

Die Plücker'sche Abstandsformel liefert: $d(C, AB) = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{\|\vec{AB}\|}$

Mit $d(A, B) = \|\vec{AB}\|$ folgt die Behauptung: $d(A, B) \cdot d(C, AB) = \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$



Weiterhin ist nachzuweisen, dass der Wert des Ausdrucks $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$ unabhängig von der Wahl der Bezeichnung der Ecken des Dreiecks ist.

(22.17) Bemerkung

Gegeben seien drei Punkte A, B und C.

Dann gilt: $\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \|\vec{BC} \times \vec{BA}\| = \|\vec{CA} \times \vec{CB}\|$

Beweis:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= (\vec{B} - \vec{A}) \times (\vec{C} - \vec{A}) \\ &= \vec{B} \times \vec{C} - \vec{A} \times \vec{C} - \vec{B} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{A} && \text{[Distributivgesetz]} \\ &= \vec{B} \times \vec{C} + \vec{C} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{B} && \text{[Antikommutativgesetz; } \vec{A} \times \vec{A} = \vec{0} \text{]} \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist zyklisch symmetrisch in A, B und C; deswegen muss er auch mit den beiden anderen Termen der Behauptung übereinstimmen. Wer durch dieses Argument nicht überzeugt ist, kann den Beweis durch die beiden fehlenden Rechnungen ergänzen.

Nun definieren wir das Flächenmaß für Dreiecke, so wie es durch Satz (22.16) nahegelegt wird. Die Bemerkung (22.17) garantiert, dass die Definition unabhängig von der Wahl des Eckpunktes ist.

(22.18) Definition

Für jedes Dreieck $\langle ABC \rangle$ des Modellraumes heißt die Zahl $\hat{a} \langle ABC \rangle := \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$ *Flächeninhalt (der Fläche) des Dreiecks $\langle ABC \rangle$* .

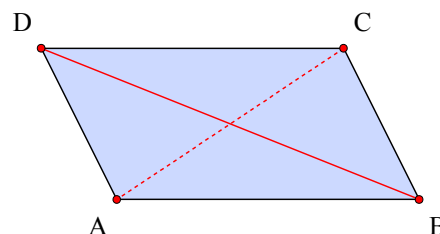
Der Flächeninhalt eines Parallelogramms und der Flächeninhalt eines Dreiecks sind unabhängig voneinander definiert worden. Daher ist es zwingend erforderlich, die Kompatibilität dieser Definitionen im Sinne der Anforderung (22.11) III zu überprüfen.

(22.19) Satz

Sei $\langle ABCD \rangle$ ein Parallelogramm des Modellraumes.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \hat{a} \langle ABCD \rangle &= \hat{a} \langle ABD \rangle + \hat{a} \langle CDB \rangle \\ \hat{a} \langle ABCD \rangle &= \hat{a} \langle ABC \rangle + \hat{a} \langle CDA \rangle \end{aligned}$$



Beweis:

Da $\langle ABCD \rangle$ ein Parallelogramm ist, gilt $\vec{AB} = \vec{DC}$ und $\vec{AD} = \vec{BC}$. Gemäß (22.18) gilt:

$$\begin{aligned} \hat{a} \langle ABD \rangle + \hat{a} \langle CDB \rangle &= \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AD}\| + \frac{1}{2} \|\vec{CD} \times \vec{CB}\| \\ &= \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AD}\| + \frac{1}{2} \|(-\vec{AB}) \times (-\vec{AD})\| = \|\vec{AB} \times \vec{AD}\| = \hat{a} \langle ABCD \rangle \end{aligned}$$

Die Bemerkungen (22.13) und (22.17) sorgen dafür, dass die Wahl der teilenden Diagonale keine Rolle spielt.

Die Flächen der beiden Teildreiecke $\langle ABD \rangle$ und $\langle CBD \rangle$ überlappen sich in der teilenden Diagonalen. Genau genommen hätte für die Kompatibilitätsprüfung die Gültigkeit der Gleichung

$$\hat{a} \langle ABCD \rangle = \hat{a} \langle ABD \rangle + \hat{a} \langle CDB \rangle - \hat{a} \langle \overline{BD} \rangle$$

untersucht werden müssen. Aber auch diese ist wegen $\hat{a} \langle \overline{BD} \rangle = 0$ gewährleistet.



Im dritten Definitionsschritt wird schließlich der Flächeninhalt triangulierbarer Polygone erklärt.

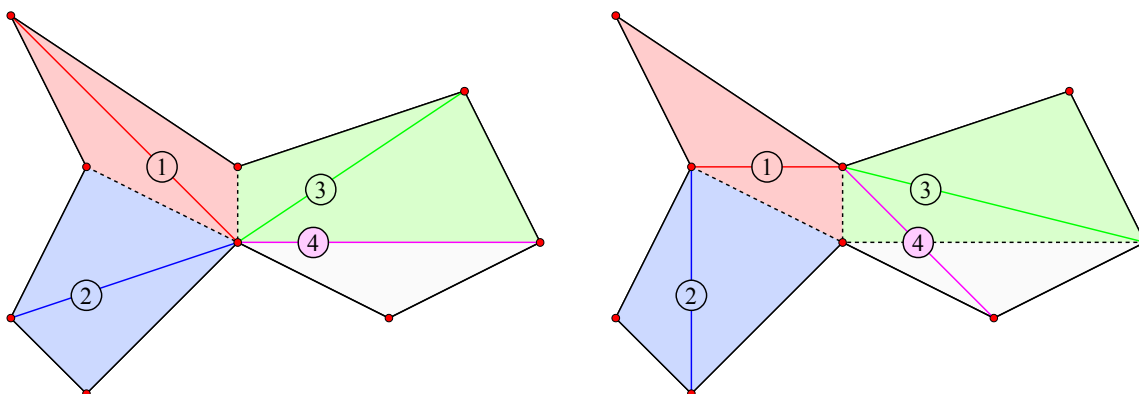
(22.20) Definition

Sei p die Fläche eines triangulierbaren (ebenen) Polygons und $\vartheta = \{d_1, \dots, d_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Triangulierung des Polygons gemäß Definition (13.10).

Dann sei der *Flächeninhalt (der Fläche) des Polygons* die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke, aus denen die Triangulierung des Polygons besteht: $\hat{a}(p) := \hat{a}(d_1) + \dots + \hat{a}(d_n)$

Damit der Flächeninhalt triangulierbarer Polygone wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, dass dieser unabhängig von der Wahl der Triangulierung ist. Anschaulich bedeutet diese Zerlegungsunabhängigkeit, dass das Flächenmaß „gleichmäßig“ misst und nicht etwa gleich großen Teilbereichen je nach Lage unterschiedliches Gewicht zuordnet. Eine solche Ungleichmäßigkeit würde im Übrigen auch der Anforderung (22.11) IV widersprechen!

Im Anhang zu §13 haben wir dargelegt, dass je zwei Triangulierungen eines triangulierbaren Polygons durch eine endliche Folge von Diagonalenwechseln in Vierecken miteinander assoziiert sind.



Um die Unabhängigkeit des Flächeninhalts eines Polygons von der Wahl der Triangulierung zu beweisen, ist daher nur nachzuweisen, dass ein Diagonalenwechsel in einem Viereck keine Auswirkung auf den Flächeninhalt des Vierecks hat. Achtung: Im Satz (22.19) wurde das nur für Parallelogramme geklärt!

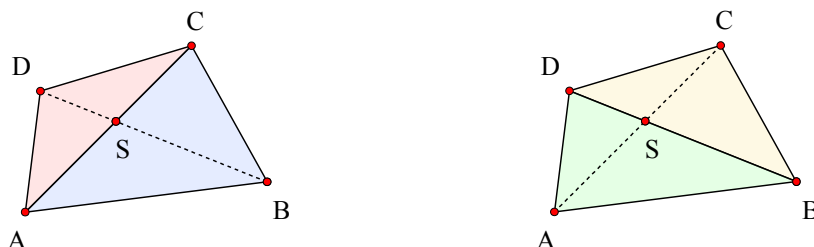
Ein Diagonalenwechsel ist in einem Viereck allerdings nur möglich, wenn sich die Diagonalen schneiden. Das wurde bereits im Anhang des §13 erläutert.

Wenn sich die Diagonalen nicht schneiden, kann das Viereck nur auf eine Weise trianguliert werden (siehe Abbildung rechts). Dann ist aber nichts zu zeigen.



Liegt jedoch ein Viereck vor, in dem sich die Diagonalen schneiden, ist ein Wechsel der Diagonalen möglich. Sein Flächeninhalt wird deswegen über zwei Triangulierungen doppelt definiert.

Bei der Lösung des Problems können wir die Früchte ernten, die im Anhang zu §13 gesät wurden. Offensichtlich müssen ist nur nachzuweisen, dass der Flächeninhalt eines Dreiecks eine Teilung durch eine Transversale duldet, die durch eine Eckpunkt des Dreiecks verläuft. Ist das gewährleistet, so gilt mit Bezug auf die Bezeichnungen der folgenden Abbildung:



$$\begin{aligned} \hat{a} \langle ABC \rangle + \hat{a} \langle CDA \rangle &= (\hat{a} \langle ABS \rangle + \hat{a} \langle BCS \rangle) + (\hat{a} \langle CDS \rangle + \hat{a} \langle DAS \rangle) \\ &= (\hat{a} \langle DAS \rangle + \hat{a} \langle ABS \rangle) + (\hat{a} \langle BCS \rangle + \hat{a} \langle CDS \rangle) = \hat{a} \langle ABD \rangle + \hat{a} \langle BCD \rangle \end{aligned}$$

Beide Triangulierungen des Vierecks liefern die gleiche Flächeninhaltssumme; sein Flächeninhalt ist wohldefiniert!

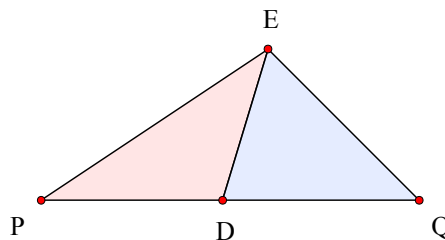


Wir beweisen jetzt den zentralen Hilfssatz, der gewährleistet, dass der Flächeninhalts eines triangulierbaren Polygons unabhängig von der Wahl der Triangulierung definiert ist.

(22.21) Lemma

Gegeben sei im Modellraum ein Dreieck.

Ist E einer der drei Eckpunkte des Dreiecks und D ein Punkt auf der E gegenüber liegenden Seite des Dreiecks, dann stimmt die Summe der Flächeninhalte der beiden Teildreiecke, die die Transversale ED erzeugt, mit dem Flächeninhalt des Dreiecks überein.



Beweis:

Wie in der Abbildung gegeben, bezeichnen wir die Eckpunkte der Seite, die dem Eckpunkt E gegenüber liegt, mit P und Q. Unter dieser Voraussetzung liegt der Punkt D auf der Strecke \overline{PQ} .

Fällt D mit einem der beiden Eckpunkte P und Q zusammen, ist offenbar nichts zu zeigen, weil dann ein Teildreieck zu einer Strecke entartet, die den Flächeninhalt 0 besitzt.

Wir dürfen also im Weiteren davon ausgehen, dass D weder mit P noch mit Q übereinstimmt. Also gibt es einen Skalar $\lambda \in]0; 1[$ mit $\overrightarrow{PD} = \lambda \overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{DQ} = -\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PQ} = (1 - \lambda) \overrightarrow{PQ}$. Offenbar gilt auch $1 - \lambda \in]0; 1[$.

Gemäß Satz (22.16) folgt:

$$\begin{aligned} \hat{a} \langle PDE \rangle + \hat{a} \langle DQE \rangle &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{PD}\| \cdot d(E, PQ) + \frac{1}{2} \|\overrightarrow{DQ}\| \cdot d(E, PQ) \\ &= \frac{1}{2} \lambda \|\overrightarrow{PQ}\| \cdot d(E, PQ) + \frac{1}{2} (1 - \lambda) \|\overrightarrow{PQ}\| \cdot d(E, PQ) \quad [\text{Regel (14.16)(2)}] \\ &= (\lambda + (1 - \lambda)) \cdot \frac{1}{2} \|\overrightarrow{PQ}\| \cdot d(E, PQ) \\ &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{PQ}\| \cdot d(E, PQ) = \hat{a} \langle PQE \rangle \end{aligned}$$

Der Beweis könnte auch mit Hilfe der Definition (22.18) unter Ausnutzung der Rechenregeln für das Vektorprodukt geführt werden (siehe Übung 22.10).

Im letzten Schritt wird der Definitionsbereich des Flächenmaßes auf flächenmessbare Punktmengen ausgeweitet:

Definition (22.22)

Sei m eine flächenmessbare Punktmenge, die gemäß Definition (22.10) aus n Flächen p_1, \dots, p_n triangulierbarer Polygone zusammengesetzt ist. Dann sei ihr Flächeninhalt die Summe der Flächeninhalte der Polygone:

$$\hat{a}(m) := \hat{a}(p_1) + \dots + \hat{a}(p_n)$$

Wir schließen diesen Paragraphen mit ein paar Anmerkungen zur Kongruenzinvarianz des Flächenmaßes (Anforderung (22.11) IV).

Diesbezüglich müssen wir als erstes einräumen, dass wir bisher in die Theorie der Abbildungen im Modellraum nicht eingestiegen sind, sondern diese nur streiften, als wir über Verschiebungen nachdachten. Tatsächlich würde sich ein weites Feld öffnen, wenn wir eine systematische Grundlegung des Abbildungsbegriffs im Modellraum vornähmen. Ausschnitte dieses Feldes werden in den miteinander zusammenhängenden mathematischen Theorien der „Linearen Abbildungen“ und „Affinen Abbildungen“ beleuchtet.

Wir beschränken uns hier, darauf zu verweisen, dass Kongruenzabbildungen längentreu und (daher auch) winkeltreu sind. Das liegt daran, dass sich jede Kongruenzabbildung durch eine Hintereinanderausführung von Spiegelungen an Ebenen ersetzen lässt. Die Übungen 22.8 dient dem Nachweis, dass Spiegelungen an einer Ebene längentreu sind.

Da der Flächeninhalt eines Dreiecks durch die Längen seiner Seiten festgelegt ist, verändert er sich unter einer Kongruenzabbildung nicht. Da außerdem eine Triangulierung eines Polygons unter einer Kongruenzabbildung erhalten bleibt, kann sich auch sein Flächeninhalt nicht verändern. Damit wollen wir es hier bewenden lassen.