Übungen zu §22

Übung 22.1

(a) Zeige die Gültigkeit der Gleichung in Lemma (22.3) anhand der Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(b) Bestimme mit Hilfe des Satzes (22.5) den Winkel $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$.

Übung 22.2

Gegeben ist das Dreieck $\langle ABC \rangle$ mit $A = (5; -3, 4)$, $B = (-1; 3; 7)$, $C = (7; 2; 7)$.

(a) Zeige für das Dreieck $\langle ABC \rangle$ durch direkte Berechnung der Ausdrücke, dass die in der Bemerkung (22.14) angegebene Gleichungskette $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\|$ gültig ist.

(b) Berechne den Abstand des Punktes C von der Geraden AB
  - mit Hilfe des Lotfußpunktes von C auf AB
  - mit Hilfe der Plückerschen Abstandsformel

(c) Berechne das Produkt $\frac{1}{2} d(A, B) \cdot d(C, AB)$ und vergleiche es mit den Ergebnissen der Teilaufgabe (a).

Übung 22.3

(a) Gegeben ist die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Ermittle eine Plücker-Gleichung für g und prüfe mit dieser, ob der Punkt $P = (-11; -1; 18)$ auf g liegt.

(b) Gegeben ist die Gerade $h: \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \vec{X} - \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Prüfe mit der gegebenen Plücker-Gleichung, ob der Punkt $Q = (-1; 0; 2)$ auf h liegt und ermittle eine Punktrichtungsgleichung von h.

Übung 22.4

Beweise die Rechenregeln (22.1) für das Vektorprodukt.

Übung 22.5

(a) Führe das in der Bemerkung (22.2) angegebene Gegenbeispiel aus.

(b) Gib drei verschiedene Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ an, für die $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ gilt.

Übung 22.6

Gegeben ist das Viereck $\langle ABCD \rangle$ mit $A = (2; -8, -3)$, $B = (-1; -4; 7)$, $C = (3; 3; -1)$, $D = (-5; 2; 6)$.

(a) Zeige, dass das Viereck windschief ist.

(b) Indem als „Raumknick“ alternativ die Diagonale AC oder die Diagonale BD verwendet wird, entstehen zwei verschiedene räumlich geknickte Vierecksflächen. Berechne ihre Flächeninhalte und vergleiche sie.

(c) Stelle beide Vierecksflächen in zwei (parallel zueinander angeordneten) Koordinatensystemen dar.

Übung 22.7

Gegeben seien ein Dreieck $\langle ABC \rangle$ und ein Vektor $\vec{u}$.

Sei $\langle EFG \rangle$ das Bilddreieck von $\langle ABC \rangle$ vermöge der durch den Vektor $\vec{u}$ erzeugten Translation, das heißt, es gelte $\vec{E} = \vec{A} + \vec{u}$, $\vec{F} = \vec{B} + \vec{u}$ und $\vec{G} = \vec{C} + \vec{u}$.

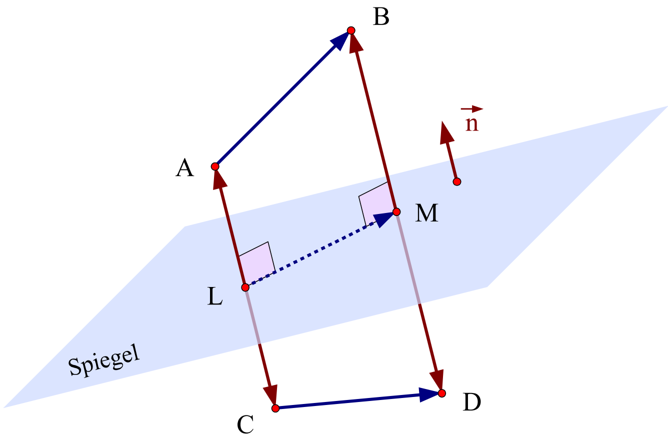
Zeige, dass die beiden Dreiecke $\langle ABC \rangle$ und $\langle EFG \rangle$ denselben Flächeninhalt besitzen.

Übung 22.8

Gegeben sei eine Ebene $e : \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$ und zwei Punkte A und B des Modellraumes.
L und M seien die Lotfußpunkte von A und B in der Ebene e.
Die Bildpunkte C und D von A und B unter der Spiegelung an der Ebene e sind gegeben durch

$$\vec{C} = \vec{L} + \overrightarrow{AL} \quad \text{sowie} \quad \vec{D} = \vec{M} + \overrightarrow{BM}$$

Zeige, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ den gleichen Betrag besitzen.

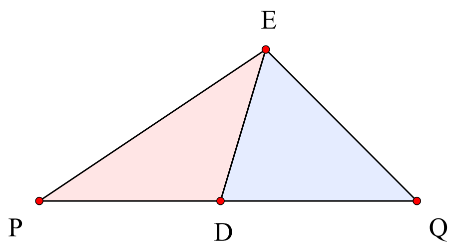


Tipps:

- $\vec{A} = \vec{L} - \overrightarrow{AL}$, $\vec{B} = \vec{M} - \overrightarrow{BM}$
- Die Vektoren $\overrightarrow{AL}$ und $\overrightarrow{BM}$ sind Vielfache des Normalenvektors $\vec{n}$.
- Berechne $\overrightarrow{AB}^2$ und $\overrightarrow{CD}^2$ und beachte dabei, dass $\overrightarrow{LM}$ ein Richtungsvektor der Ebene e ist.

Übung 22.9

Beweise das Lemma (22.19) mit Hilfe der Definition (22.16) unter Ausnutzung der Rechenregeln für das Vektorprodukt.



Tipps:

- Drücke die Summe der Flächeninhalte der Teildreiecke $\hat{a}\langle PDE \rangle + \hat{a}\langle DQE \rangle$ gemäß Definition (22.16) aus.
- Nutze die Rechenregeln für das Vektorprodukt (22.1).
- Das Ergebnis von Übung 14.8 verkürzt die Rechnung.