Übung 22.1

(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ -24 \end{pmatrix}$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = -17$

$$\| \vec{u} \times \vec{v} \|^2 = 18^2 + 6^2 + 24^2 = 936$$

$$\| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = 49 \cdot 25 - 289 = 936$$

(b) $$\sin(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{\| \vec{u} \times \vec{v} \|}{\| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \|} = \frac{\sqrt{936}}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}\sqrt{26}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) \approx 60{,}9407^\circ$$

Übung 22.2

$A = (5; -3; 4)$; $B = (-1; 3; 7)$; $C = (7; 2; 7)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ +5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \\ -42 \end{pmatrix}$; $\| \vec{AB} \times \vec{AC} \|^2 = 9 + 576 + 1764 = 2349$

$\vec{BC} \times \vec{BA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \\ -42 \end{pmatrix}$; $\| \vec{BC} \times \vec{BA} \|^2 = 2349$

$\vec{CA} \times \vec{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \\ -42 \end{pmatrix}$; $\| \vec{CA} \times \vec{CB} \|^2 = 2349$

(b) Lotebene von C auf AB: $e: \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 9 = 0$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right] + 9 = 0 \Leftrightarrow -36 + 81\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow 81\lambda = 27$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

Lotfußpunkt L von C auf AB: $\vec{L} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$d(C, AB) = \| \vec{CL} \| = \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{29}$$

Plücker-Formel:

$$d(C, AB) = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\sqrt{2349}}{\sqrt{81}} = \sqrt{29}$$

(c) $\frac{1}{2}\, d(A,B) \cdot d(C,AB) = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{29} = \frac{9}{2}\sqrt{29}$

$\frac{1}{2}\, \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{2349} = \frac{9}{2}\sqrt{29}$

<u>Übung 22.3</u>

(a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\1\\8\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$; Plücker-Gleichung: $\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-3\\1\\8\end{pmatrix}\right] = \vec{0}$

$(-11; -1; 18) \in g \iff \exists \lambda: \begin{pmatrix}-11\\-1\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\8\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix} \iff \lambda = -2$

$P \in g!$

$(-11; -1; 18) \in g \iff \begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-8\\-2\\10\end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$; $P \in g!$

(b) $h: \begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix} \times \vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\8\\1\end{pmatrix} = \vec{0}$; Stützpunktansatz: $\vec{A} := \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$A \in h \iff \begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\8\\1\end{pmatrix}$

(1) $-z - 2y = -2$

(2) $-(-3z - 2x) = 8 \iff 3z + 2x = 8 \iff z = \frac{1}{3}(-2x + 8)$

(3) $-3y + x = 1 \iff 3y = x - 1 \iff y = \frac{1}{3}(x-1)$

Setze $x := 4$; (2) $\Rightarrow z = 0$; (3) $\Rightarrow y = 1$

Probe: $\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\8\\1\end{pmatrix}$; $A := (4; 1; 0) \in h$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}$

$Q \in h \iff \begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\8\\1\end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix}-2\\8\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\8\\1\end{pmatrix} = \vec{0}$ [falsch!]

$Q \notin h!$

Übung 22.4

zu (1): $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(v_2 u_3 - v_3 u_2) \\ -[-(v_1 u_3 - v_3 u_1)] \\ -(v_1 u_2 - v_2 u_1) \end{pmatrix} = -\vec{v} \times \vec{u}$

zu (2): $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda u_2 v_3 - \lambda u_3 v_2 \\ -(\lambda u_1 v_3 - \lambda u_3 v_1) \\ \lambda u_1 v_2 - \lambda u_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(u_2 v_3 - u_3 v_2) \\ \lambda[-(u_1 v_3 - u_3 v_1)] \\ \lambda(u_1 v_2 - u_2 v_1) \end{pmatrix} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$

$\vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = -\lambda \vec{v} \times \vec{u} = -\lambda(\vec{v} \times \vec{u}) = -\lambda(-\vec{u} \times \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$

zu (3): $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2) \\ -(u_1(v_3 + w_3) - u_3(v_1 + w_1)) \\ u_1(v_2 + w_2) - u_2(v_1 + w_1) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (u_2 v_3 - u_3 v_2) + (u_2 w_3 - u_3 w_2) \\ -((u_1 v_3 - u_3 v_1) + (u_1 w_3 - u_3 w_1)) \\ (u_1 v_2 - u_2 v_1) + (u_1 w_2 - u_2 w_1) \end{pmatrix} = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

Wie zu (2) kann auch $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$

nachgewiesen werden.

Übung 22.5

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{w} := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$; $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{0} \times \vec{w} = \vec{0}$

Übung 22.6

(a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -102 \\ 16 \\ -37 \end{pmatrix}$

ABC: $\begin{pmatrix} -102 \\ 16 \\ -37 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 221 = 0$; $D \in ABC \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -102 \\ 16 \\ -37 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 221 = 0$

$\Longleftrightarrow 320 + 221 = 0$ [falsch]

$D \notin ABC$; $\langle ABCD \rangle$ ist windschief!

(b) „Raumknick" AC:

Wir berechnen $\hat{a}\langle ABC\rangle + \hat{a}\langle CDA\rangle$

$$\hat{a}\langle ABC\rangle = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-102\\16\\-37\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{12029}$$

$$\hat{a}\langle CDA\rangle = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CA}\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-8\\-1\\7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-11\\-2\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}79\\-23\\87\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{14339}$$

$$\hat{a}\langle ABC\rangle + \hat{a}\langle CDA\rangle \approx 114{,}742$$

„Raumknick" BD:

Wir berechnen $\hat{a}\langle ABD\rangle + \hat{a}\langle CDB\rangle$

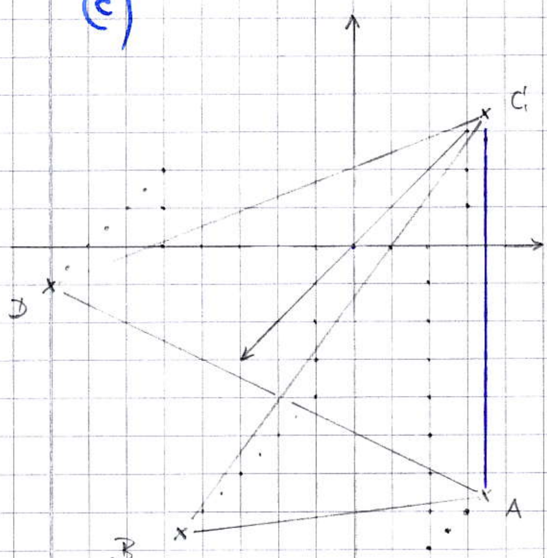
$$\hat{a}\langle ABD\rangle = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-3\\4\\10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-7\\10\\9\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-64\\-43\\-2\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{5949}$$

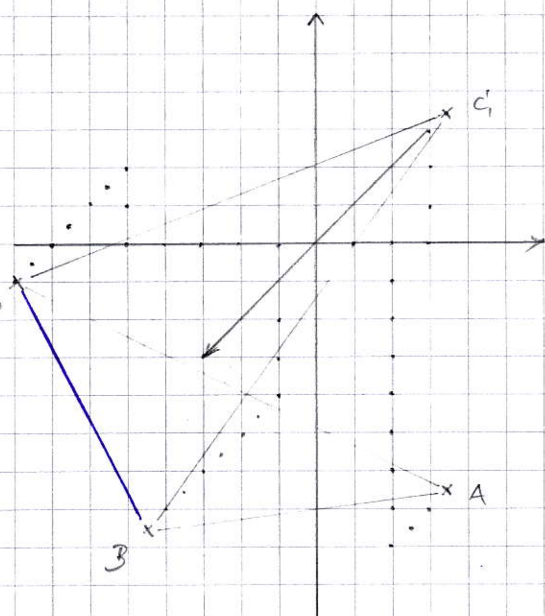
$$\hat{a}\langle CDB\rangle = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CB}\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-8\\-1\\7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\-7\\8\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}41\\36\\52\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{5681}$$

$$\hat{a}\langle ABD\rangle + \hat{a}\langle CDB\rangle \approx 76{,}2511$$

Die beiden Flächeninhaltssummen differieren erheblich!

(c)





Übung 22.7

$$\hat{a}\langle EFG\rangle = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{EF}\times\overrightarrow{EG}\| = \frac{1}{2}\left\|\left(-\vec{A}-\vec{u}+\vec{B}+\vec{u}\right)\times\left(-\vec{A}-\vec{u}+\vec{C}+\vec{u}\right)\right\|$$

$$= \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \hat{a}\langle ABC\rangle$$

Übung 22.8

Weil L der Lotfußpunkt von A auf e ist, gilt $\vec{L} = \vec{A} + \lambda \vec{n}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Weil M der Lotfußpunkt von B auf e ist, gilt $\vec{M} = \vec{B} + \mu \vec{n}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.
Also haben wir $\overrightarrow{AL} = \lambda \vec{n}$ und $\overrightarrow{BM} = \mu \vec{n}$.

$$\overrightarrow{AB}^2 = \left(-\vec{A} + \vec{B}\right)^2 = \left(-\left(\vec{L} + \overrightarrow{LA}\right) + \left(\vec{M} + \overrightarrow{MB}\right)\right)^2 = \left(\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{BM}\right)^2$$
$$= \overrightarrow{LM}^2 + \overrightarrow{AL}^2 + \overrightarrow{BM}^2 + 2\,\overrightarrow{LM}\cdot\overrightarrow{AL} - 2\cdot\overrightarrow{LM}\cdot\overrightarrow{BM} - 2\cdot\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{BM}$$

Da $\overrightarrow{LM}$ ein Richtungsvektor von e ist und $\overrightarrow{AL}$ sowie $\overrightarrow{BM}$ Vielfache des Normalenvektors $\vec{n}$ sind, gilt $\overrightarrow{LM}\cdot\overrightarrow{AL} = 0$ und $\overrightarrow{LM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$.

Also folgt: $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{LM}^2 + \overrightarrow{AL}^2 + \overrightarrow{BM}^2 - 2\,\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{BM}$

$$\overrightarrow{CD}^2 = \left(-\vec{C} + \vec{D}\right)^2 = \left(-\left(\vec{L} + \overrightarrow{AL}\right) + \left(\vec{M} + \overrightarrow{BM}\right)\right)^2 = \left(\overrightarrow{LM} - \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{BM}\right)^2$$
$$= \overrightarrow{LM}^2 + \overrightarrow{AL}^2 + \overrightarrow{BM}^2 - 2\,\overrightarrow{LM}\cdot\overrightarrow{AL} + 2\,\overrightarrow{LM}\cdot\overrightarrow{BM} - 2\,\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{BM}$$
$$= \overrightarrow{LM}^2 + \overrightarrow{AL}^2 + \overrightarrow{BM}^2 - 2\,\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{BM}$$

Insgesamt folgt: $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{CD}^2$

Übung 22.9 siehe Übung 14.8 !

~~Wenn die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind, gilt o.B.d.A $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Mit der Regel (14.16)(2) folgt:~~

~~$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} + \lambda\vec{u}\| = \|(1+\lambda)\vec{u}\| = (1+\lambda)\|\vec{u}\|$$~~
~~$$= \|\vec{u}\| + \lambda\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\| + \|\lambda\vec{u}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$~~

Übung 22.~~10~~ 9

Ist $D \in \overline{PQ} \setminus \{P, Q\}$, so gibt es $\lambda \in \,]0;1[$ mit $\overrightarrow{PD} = \lambda \overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{DQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{PQ}$.
Da $\lambda \in \,]0;1[$, gilt auch $1-\lambda \in \,]0;1[$.

$$\hat{a}\langle PDE\rangle + \hat{a}\langle DQE\rangle = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{PD} \times \overrightarrow{PE}\| + \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{DQ} \times \overrightarrow{DE}\|$$
$$= \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{PD} \times \overrightarrow{PE}\| + \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{DQ} \times (-\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE})\| \qquad [\overrightarrow{DQ} \times \overrightarrow{PD} = \vec{0}\,!]$$
$$= \tfrac{1}{2}\|\lambda\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PE}\| + \tfrac{1}{2}\|(1-\lambda)\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PE}\| \qquad [\lambda, 1-\lambda \in \,]0;1[\,!]$$

Zwischenschritt wegen ~~22.9~~ 14.8 überflüssig!

$$= \lambda\cdot\tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PE}\| + (1-\lambda)\cdot\tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PE}\| = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PE}\| = \hat{a}\langle PQE\rangle$$