Übung 21.1

(a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\vec{CD} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{DA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Gemäß Satz (7.9) liegt ein Parallelogramm vor, denn $\vec{AB} = \vec{DC}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -5 - 3 + 12 \neq 0$; also ist $\langle ABCD \rangle$ kein Rechteck.

$\| \vec{AB} \| = \sqrt{38}$; $\| \vec{BC} \| = \sqrt{38}$. $\langle ABCD \rangle$ ist ein Rhombus.

(b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}$; $\vec{DA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Offenbar ist $\langle ABCD \rangle$ ein Parallelogramm.

$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -8 - 16 + 24 = 0$; also ist $\langle ABCD \rangle$ ein Rechteck.

$\| \vec{AB} \| = \sqrt{176}$; $\| \vec{BC} \| = \sqrt{24}$. $\langle ABCD \rangle$ ist kein Quadrat.

(c) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{CD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix}$; $\vec{DA} = \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 20 \end{pmatrix}$

Die Seitenvektoren sind paarweise linear unabhängig; $\langle ABCD \rangle$ ist kein Trapez!

$\| \vec{AB} \| = \sqrt{75}$; $\| \vec{BC} \| = \sqrt{75}$; $\| \vec{CD} \| = \sqrt{525}$; $\| \vec{DA} \| = \sqrt{525}$

$\langle ABCD \rangle$ ist ein Drachen. Die „Hauptdiagonale" ist BD.

(d) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -16 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\vec{CD} = \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ 24 \end{pmatrix}$; $\vec{DA} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{CD} = -\frac{3}{2} \vec{AB}$; $\langle ABCD \rangle$ ist ein Trapez mit den Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.

$\| \vec{BC} \| = 7$; $\| \vec{DA} \| = 7$; $\langle ABCD \rangle$ ist gleichschenklig.

Übung 21.2

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = 2$; $\|\overrightarrow{BC}\| = 2$; $\|\overrightarrow{CD}\| = 2$; $\|\overrightarrow{DA}\| = 2$

Alle Seiten des Vierecks <ABCD> sind gleich lang.

Trotzdem kann es sich nicht um einen Rhombus handeln,

weil jeder Rhombus ein Parallelogramm ist.

Da die vier Seitenvektoren paarweise linear unabhängig sind,

kann <ABCD> kein Parallelogramm sein.

Übung 21.3

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{n} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor

der Ebene ABC. $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu $\vec{n}$.

Also ist $\overrightarrow{AD}$ ein Richtungsvektor von ABC und deshalb D ein Punkt der Ebene ABC.

$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ebenfalls orthogonal zu $\vec{n}$. Also gilt $M \in ABC$.

$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Offenbar gilt $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{DM}\| = \sqrt{17}$

$$\measuredangle(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \frac{10}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \measuredangle(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \approx 75{,}9638$$

$$\measuredangle(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) = \frac{0}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{34}} = 0 \Rightarrow \measuredangle(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = 90°$$

$$\measuredangle(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}) = \frac{-6}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{34}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \measuredangle(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}) \approx 104{,}0362$$

$$\measuredangle(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}) = \frac{0}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{18}} = 0 \Rightarrow \measuredangle(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}) = 90°$$

Gegenüber liegende Innenwinkel sind supplementär.

Übung 21.4

(a) Beweis zu Satz (21.7)

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{u} - \vec{v}$$

$$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = -\vec{v} - \vec{u}$$

$$\|\vec{AC}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - 0 + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$$

$$\|\vec{BD}\|^2 = (-\vec{v} - \vec{u})^2 = \vec{v}^2 + 2\vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{u}^2 = \vec{v}^2 + 0 + \vec{u}^2 = u^2 + \vec{v}^2$$

Also gilt $\|\vec{AC}\| = \|\vec{BD}\|$

(b) Beweis zu Satz (21.8)

$$\sphericalangle(\vec{AB}, \vec{AD}) = \sphericalangle(\vec{u}, -\vec{v}) \underset{(14.17)(2)}{=} 180° - \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\sphericalangle(\vec{DA}, \vec{DC}) = \sphericalangle(\vec{v}, -\lambda\vec{u}) \underset{(14.17)(2)}{=} \sphericalangle(\vec{v}, \vec{u}) \qquad [-\lambda > 0\,!]$$

$$\underset{(14.17)(1)}{=} \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$$

Es folgt: $\sphericalangle(\vec{AB}, \vec{AC}) + \sphericalangle(\vec{DA}, \vec{DC}) = (180° - \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})) + \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = 180°$

$$\sphericalangle(\vec{BC}, \vec{BA}) = \sphericalangle(-\vec{u} - \vec{v} - \lambda\vec{u}, -\vec{u}) \underset{(14.17)(2)}{=} \sphericalangle(u + \vec{v} + \lambda\vec{u}, \vec{u})$$

$$\underset{(14.17)(1)}{=} \sphericalangle(\vec{u}, \vec{u} + \vec{v} + \lambda\vec{u})$$

$$\sphericalangle(\vec{CD}, \vec{CB}) = \sphericalangle(\lambda\vec{u}, \vec{u} + \vec{v} + \lambda\vec{u}) \underset{(14.17)(2)}{=} 180° - \sphericalangle(\vec{u}, \vec{u} + \vec{v} + \lambda\vec{u}),$$

da $\lambda < 0$

Es folgt wiederum $\sphericalangle(\vec{BC}, \vec{CA}) + \sphericalangle(\vec{CD}, \vec{CB}) = 180°$

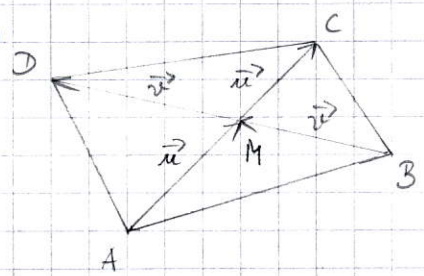
(c) Beweis zu Satz (21.9)

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle(\vec{AB}, \vec{AD}) &= \sphericalangle(\vec{u}, -\vec{v}) = 180° - \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) \\ \sphericalangle(\vec{CD}, \vec{CB}) &= \sphericalangle(-\vec{u}, \vec{v}) = 180° - \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}\right\} \sphericalangle(\vec{AB}, \vec{AD}) = \sphericalangle(\vec{CD}, \vec{CB})$$

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle(\vec{BC}, \vec{BA}) &= \sphericalangle(-\vec{v}, -\vec{u}) = \sphericalangle(\vec{v}, \vec{u}) = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) \\ \sphericalangle(\vec{DA}, \vec{DC}) &= \sphericalangle(\vec{v}, \vec{u}) = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}\right\} \sphericalangle(\vec{BC}, \vec{BA}) = \sphericalangle(\vec{DA}, \vec{DC})$$

Übung 21.5

(a)



Voraussetzungen:

$\vec{AM} = \vec{MC} =: \vec{u}$

$\vec{BM} = \vec{MD} =: \vec{v}$

$\|\vec{AC}\| = \|\vec{BD}\| \Rightarrow \|2\vec{u}\| = \|2\vec{v}\|$

$\Rightarrow \vec{u}^2 = \vec{v}^2$

$$\left.\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{AM} + \vec{MB} = \vec{u} - \vec{v}\\ \vec{DC} &= \vec{DM} + \vec{MC} = -\vec{v} + \vec{u}\end{aligned}\right\}\ \vec{AB} = \vec{DC}$$

Also ist $\langle ABCD \rangle$ ein Parallelogramm.

$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$

Also ist $\langle ABCD \rangle$ ein Rechteck.

(b) Wir übernehmen die Bezeichnungen aus (a): $\vec{u} = \vec{AM} = \vec{MC}$

$\vec{v} = \vec{BM} = \vec{MD}$

Als dritte Voraussetzung gilt $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\|\vec{AB}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$

$\|\vec{BC}\|^2 = (\vec{v} + \vec{u})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$

$\|\vec{CD}\|^2 = (-\vec{u} + \vec{v})^2 = u^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$

$\|\vec{DA}\|^2 = (-\vec{v} - \vec{u})^2 = u^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$

$\langle ABCD \rangle$ ist ein Rhombus.

(c) O.B.d.A. gelte $\vec{AM} = \vec{MC} =: \vec{u}$, aber $\vec{v} := \vec{BM}$ und $\mu\vec{v} = \vec{MD}$

Wie in Teilaufgabe (b) gilt $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\left.\begin{aligned}\|\vec{AB}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2\\ \|\vec{BC}\|^2 &= (\vec{v} + \vec{u})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2\end{aligned}\right\}\ \|\vec{AB}\| = \|\vec{BC}\|$$

$$\left.\begin{aligned}\|\vec{CD}\|^2 &= (-\vec{u} + \mu\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\mu\vec{u}\cdot\vec{v} + \mu^2\vec{v}^2 = \vec{u}^2 + \mu^2\vec{v}^2\\ \|\vec{DA}\|^2 &= (-\mu\vec{v} - \vec{u})^2 = \mu^2\vec{v}^2 + 2\mu\vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{u}^2 = \vec{u}^2 + \mu^2\vec{v}^2\end{aligned}\right\}\ \|\vec{CD}\| = \|\vec{DA}\|$$

$\langle ABCD \rangle$ ist ein Drachen mit der Hauptdiagonalen BD.