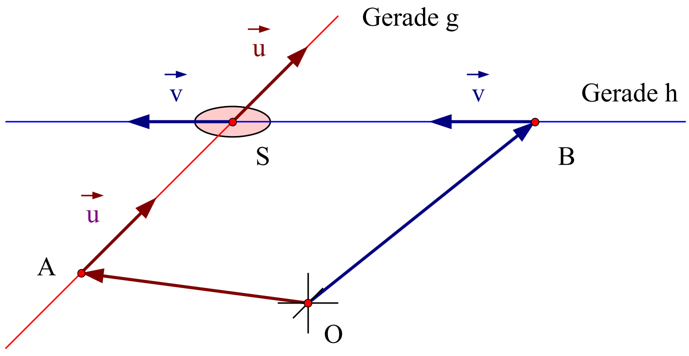
§20 Winkel

„Winkel" zwischen Geraden und Ebenen sind nach der Erkundung der Abstände das zweite Thema, dem wir uns objektübergreifend widmen. Bei der Entwicklung der Abstandsdefinitionen widmeten wir uns zunächst Paaren von Ebenen; den einfacheren Einstieg in das Thema „Winkel" bieten Paare von Winkeln.

Abschnitt 1: Winkel zwischen Geraden

Seien $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{A} + \mu\,\vec{v}$ zwei Geraden, die sich in einem Punkt S schneiden:



Der Schnittpunkt teilt beide Geraden in je zwei Halbgeraden. Diese bilden vier aneinander liegende Winkel. Die Euklidische Geometrie sagt, dass in dieser Situation gegenüber liegende Winkel gleich groß sind („Scheitelwinkel") und benachbarte sich zu 180° ergänzen („Nebenwinkel").

Es wird im Folgenden gezeigt, dass dieser Sachverhalt in der Analytischen Geometrie durch die Rechenregel für Winkel (14.17)(2) wiedergegeben wird. Dazu sei zunächst daran erinnert, dass alle Richtungsvektoren einer Geraden skalare Vielfache voneinander sind, das heißt:

- Ist $\vec{u}$ ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor von g, so lässt sich jeder andere Richtungsvektor von g als skalares Vielfaches $\lambda\,\vec{u}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ schreiben.
- Ist $\vec{v}$ ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor von h, so lässt sich jeder andere Richtungsvektor von h als skalares Vielfaches $\mu\,\vec{v}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ schreiben.

Die Rechenregel für Winkel (14.17)(2) liefert

$$\sphericalangle(\lambda\,\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{Bmatrix} \sphericalangle(\vec{u}\,;\vec{v}) & \text{, falls } \lambda > 0 \\ 180° - \sphericalangle(\vec{u}\,;\vec{v}) & \text{, falls } \lambda < 0 \end{Bmatrix} \qquad \sphericalangle(\vec{u}\,;\mu\,\vec{v}) = \begin{Bmatrix} \sphericalangle(\vec{u}\,;\vec{v}) & \text{, falls } \mu > 0 \\ 180° - \sphericalangle(\vec{u}\,;\vec{v}) & \text{, falls } \mu < 0 \end{Bmatrix}$$

Sind $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ zwei vom Nullvektor verschiedene Richtungsvektoren der Geraden g und $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ zwei vom Nullvektor verschiedene Richtungsvektoren der Geraden h, so gilt daher

entweder $\quad \sphericalangle(\vec{u}_2\,;\vec{v}_2) = \sphericalangle(\vec{u}_1\,;\vec{v}_1) \quad$ oder $\quad \sphericalangle(\vec{u}_2\,;\vec{v}_2) = 180° - \sphericalangle(\vec{u}_1\,;\vec{v}_1)$.

Die Beziehung

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha) \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

erlaubt folgende Feststellung:

(20.1) Lemma

Seien g und h zwei Geraden. Der Vektor $\vec{u}$ sei ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor der Geraden g, und der Vektor $\vec{v}$ ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor der Geraden h.

Dann ist der Wert des Terms

$$|\cos(\sphericalangle(\vec{u}\,;\vec{v}))| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

unabhängig von der Wahl der beiden Richtungsvektoren, das heißt, werden diese durch andere vom Nullvektor verschiedene Richtungsvektoren ausgetauscht, so verändert sich der Wert des Terms nicht.

Der vorangehende Hilfssatz legitimiert die folgende Definition:

<u>(20.2) Definition</u>

Seien $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu\,\vec{v}$ zwei Geraden, die mindestens einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Dann heißt die Zahl $\sphericalangle(g\,;h) := \arccos\left(\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}\right)$ Winkel zwischen g und h.

Offensichtlich ist der harmlose identische Fall in die Definition einbezogen worden!

Der Definition zufolge kann ein Schnittwinkel zweier Geraden nur zwischen 0° und 90° variieren. Es wird also als Schnittwinkel zweier Geraden stets der spitze Winkel angesehen, der von ihnen erzeugt wird.

<u>(20.3) Bemerkung</u>

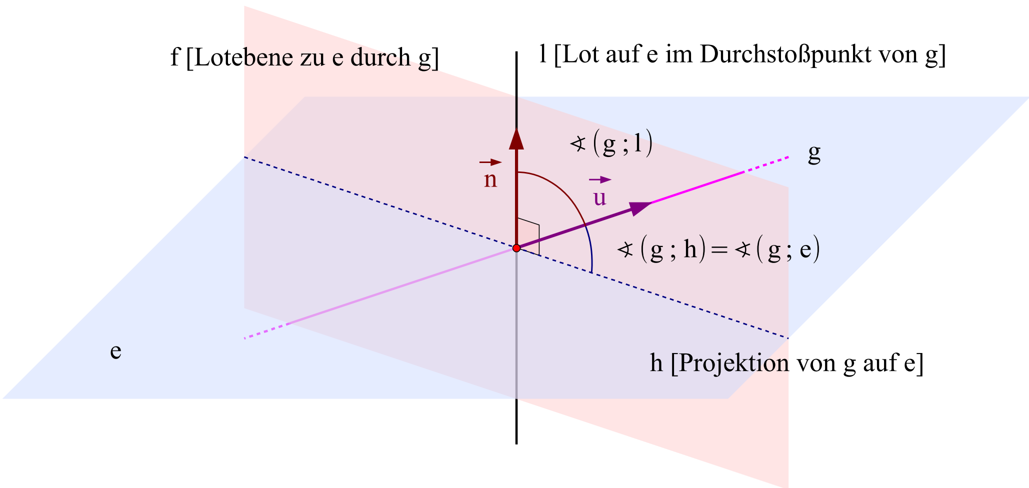
Seien $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu\,\vec{v}$ zwei Geraden, die mindestens einen gemeinsamen Punkt besitzen.
Dann gilt:

$$\sphericalangle(g\,;h) = \begin{cases} \sphericalangle(\vec{u}\,;\vec{v}) & \text{, falls } \vec{u}\cdot\vec{v} \geq 0 \\ 180° - \sphericalangle(\vec{u}\,;\vec{v}) & \text{, falls } \vec{u}\cdot\vec{v} < 0 \end{cases}$$

Es sei außerdem angemerkt, dass offenbar ohne algebraische Probleme in der Definition die Bedingung fallen gelassen werden könnte, die Schnittmenge von g und h dürfe nicht leer sein. Allerdings scheint es wenig sinnvoll zu sein, bei parallelen oder windschiefen Geraden von einem „Winkel“ zu sprechen. Der Begriff „Richtungsunterschied“ wäre als Alternative denkbar.

Abschnitt 2: Winkel zwischen Geraden und Ebenen

Betrachten wir nun eine Gerade g und eine Ebene e, die einander schneiden. Die Anschauung legt uns nahe, den Winkel zwischen g und ihrer orthogonalen Projektion h in der Ebene e als Schnittwinkel zwischen g und e zu interpretieren.



Betrachten wir zusätzlich noch das Lot l zur Ebene in dem Schnittpunkt von g und e, so erkennen wir, dass

$$\sphericalangle(g\,;h) + \sphericalangle(g\,;l) = \sphericalangle(h\,;l) = 90°$$

gelten müsste, wenn sich die Schnittwinkel von Geraden, die in einer Ebene liegen, der Anschauung entsprechend additiv ergänzen. Unter dieser Voraussetzung könnte über die Gleichung

$$\sphericalangle(g\,;e) := 90° - \sphericalangle(g\,;l)$$

der Winkel zwischen g und e definiert werden, ohne dass die orthogonale Projektion h konstruiert wird.

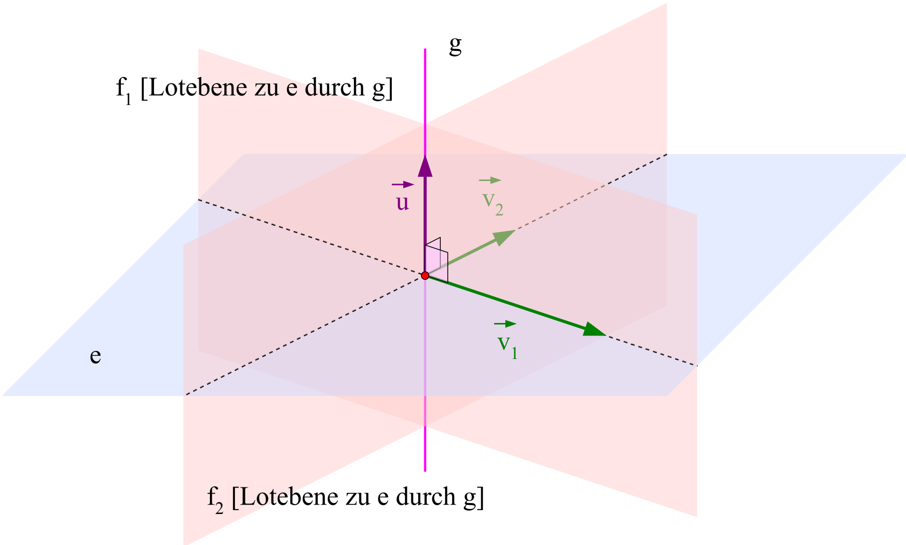
In der analytischen Umsetzung dieses anschaulichen Konzepts führen wir zunächst einen wichtigen Hilfsbegriff ein:

(20.4) Definition

Sei e eine Ebene und g eine Gerade im Modellraum.

Eine Ebene f heiße *Lotebene zur Ebene e durch die Gerade g*, wenn die Ebene f senkrecht auf der Ebene e steht und die Gerade g enthält.

Anschaulich ist klar, dass es unendlich viele Lotebenen zur Ebene e durch die Gerade g gibt, wenn die Gerade g senkrecht auf der Ebene e steht. Ist das nicht der Fall, sollte es nur eine Lotebene zur Ebene e durch die Gerade g geben.



(20.5) Satz

Sei $e: \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$ eine Ebene und $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ eine Gerade, die senkrecht auf der Ebene e steht.

Ist $\vec{v}$ ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor von e, so ist die Ebene $f: \vec{X} = \vec{A} + \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$ eine Lotebene zur Ebene e durch die Gerade g.

Beweis:

Weil die Gerade g senkrecht auf der Ebene e steht, ist ihr Richtungsvektor $\vec{u}$ ein Normalenvektor der Ebene e. Also sind die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal und daher linear unabhängig. Die Ebene f ist also wohldefiniert.

Nach Konstruktion verläuft die Gerade g vollständig in der Ebene f.

Ist $\vec{m}$ ein Normalenvektor der Ebene f , so ist $\vec{m}$ orthogonal zu ihrem Richtungsvektor $\vec{u}$. Da $\vec{u}$ ein Normalenvektor der Ebene e ist, besitzen e und f orthogonale Normalenvektoren. Also stehen sie senkrecht aufeinander.

Da im vorangehenden Satz der Richtungsvektor $\vec{v}$ frei gewählt werden kann, ist bestätigt, dass es unendlich viele Lotebenen zur Ebene e durch die Gerade g gibt, wenn die Gerade g senkrecht auf der Ebene e steht.

(20.6) Satz

Sei $e: \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$ eine Ebene und $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ eine Gerade, die **nicht** senkrecht auf der Ebene e steht.

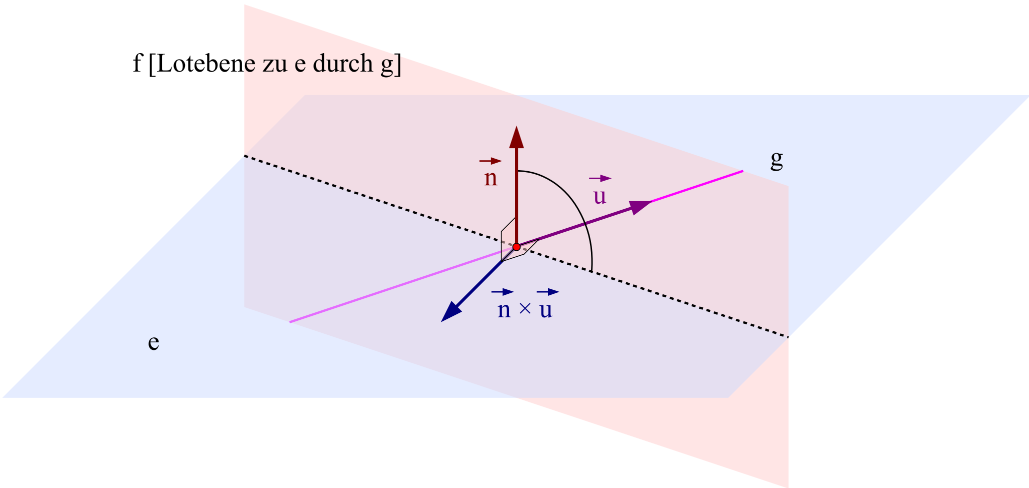
Dann ist die Ebene $f: \vec{X} = \vec{A} + \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{n}$ die einzige Lotebene zur Ebene e durch die Gerade g.

Beweis:

Da g nicht senkrecht auf e steht, ist der Vektor $\vec{u}$ kein Normalenvektor von e. Nach dem 2. Normalenvektorsatz für Ebenen (15.13) müssen die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{n}$ linear unabhängig sein; deswegen ist die Ebene f wohldefiniert. Offensichtlich enthält die Ebene f die Gerade g.

Weil der Vektor $\vec{u}\times\vec{n}$ ein Normalenvektor von f ist und die Vektoren $\vec{u}\times\vec{n}$ und $\vec{n}$ orthogonal zueinander sind, muß f senkrecht auf e stehen.

Betrachten wir nun eine weitere Ebene $\tilde{f}$ mit den Eigenschaften von f. Sei $\vec{m}$ einer ihrer vom Nullvektor verschiedenen Normalenvektoren. Da $\tilde{f}$ senkrecht auf e stehen soll, muss $\vec{m}$ orthogonal zu $\vec{n}$ sein. Da $\tilde{f}$ die Gerade g enthalten soll, muss $\vec{m}$ nach Satz (17.1) orthogonal zu $\vec{u}$ sein. Also ist $\vec{m}$ gemäß Bemerkung (15.19) ein Vielfaches von $\vec{u}\times\vec{n}$. Gemäß Satz (17.5) müssen f und $\tilde{f}$ parallel oder identisch sein. Da f und $\tilde{f}$ die Gerade g enthalten, sind sie identisch. f ist also die einzige Lotebene zur Ebene e durch die Gerade g.



Damit ist unsere Anschauung, was die Definition (20.4) anbelangt, vollumfänglich bestätigt. Wir können also auf dem eingeschlagenen Weg zur Definition des Schnittwinkels zwischen Gerade und Ebene fortfahren.

<u>(20.7) Satz</u>

Sei $e:\vec{n}\cdot\vec{X}-\gamma=0$ eine Ebene und $g:\vec{X}=\vec{A}+\lambda\,\vec{u}$ eine Gerade.

Sei h die Menge der Lotfußpunkte der Punkte von g auf e. Dann gilt:

- Steht g senkrecht auf e, so besteht h nur aus dem Schnittpunkt von g und e.
- Steht g nicht senkrecht auf e, so ist h die Schnittgerade von e mit der Lotebene zu e durch g.

Beweis:

Steht g senkrecht auf e, so sind der Richtungsvektor $\vec{u}$ von g und der Normalenvektor $\vec{n}$ von e linear abhängig. Ist Q nun ein Punkt von g, so ist das Lot l von Q auf e identisch mit g, weil es durch die Gleichung $l:\vec{X}=\vec{Q}+\rho\,\vec{n}$ beschrieben wird. Der Lotfußpunkt von Q auf e ist daher stets der Schnittpunkt von g und e.

Stehe nun g nicht senkrecht auf e.

Sei dann f die Lotebene zu e durch g. Nach Anmerkung (17.11) schneidet sie die Ebene e in einer Geraden k.

Sei nun Q ein Punkt von g. Da das Lot l von Q auf e sich durch die Gleichung $l:\vec{X}=\vec{Q}+\rho\,\vec{n}$ beschreiben lässt, liegt es ganz in der Lotebene f. Der Lotfußpunkt von Q muss als Schnittpunkt von l und e deshalb zu k gehören. Also gilt bereits $h\subseteq k$.

Wir müssen nun noch umgekehrt zeigen, dass jeder Punkt von k sich als Lotfußpunkt eines Punktes von g gewinnen lässt und darum zu h gehört.

Dazu sei L ein Punkt von k. Wir betrachten das Lot l von L auf e. Es kann durch die Gleichung $l:\vec{X}=\vec{L}+\rho\,\vec{n}$ beschrieben werden. Da L zu f gehört, liegt l offenbar ganz in f. Da die Vektoren $\vec{n}$ und $\vec{u}$ linear unabhängig sind, müssen l und g sich in einem Punkt Q schneiden oder zueinander windschief sein.

Das letztere ist nach Satz (9.14) jedoch nicht möglich, weil auch g ganz in f liegt. Offenbar besitzt der Schnittpunkt Q von l und g konstruktionsgemäß den Punkt L als Lotfußpunkt in e. Also gilt auch $k\subseteq h$ und damit letztlich h = k.

Auf der Grundlage des Satzes (20.7) ist die folgende Begriffsbildung sinnvoll:

(20.8) Definition

Sei $e: \vec{n}\cdot\vec{X} - \gamma = 0$ eine Ebene und $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ eine Gerade, die nicht senkrecht auf e steht.
Dann heißt die Gerade der Lotfußpunkte der Punkte von g in e *senkrechte Projektion von g auf e*.

Wir können nun den Zusammenhang zwischen Winkeln formulieren, den wir zu Beginn dieses Abschnitts aus der Anschauung abgeleitet haben:

(20.9) Lemma

Sei $e: \vec{n}\cdot\vec{X} - \gamma = 0$ eine Ebene und $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ eine Gerade, die e in einem Punkt S nicht senkrecht schneidet. Sei l das Lot durch S auf e und h die senkrechte Projektion von g auf e.
Dann gilt: $\sphericalangle(g;h) + \sphericalangle(g;l) = \sphericalangle(h;l) = 90°$

Beweis:

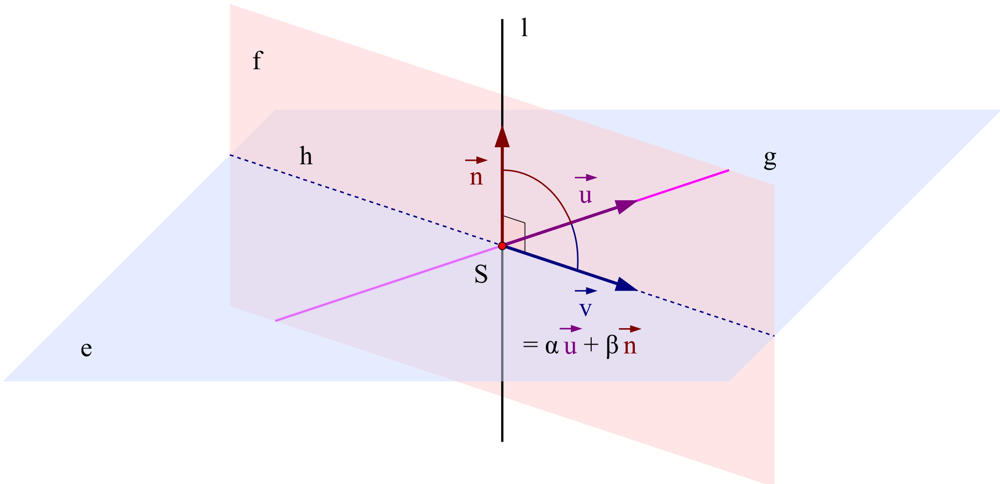
Zunächst dürfen wir davon ausgehen, dass $\vec{u}\cdot\vec{n} > 0$ gilt, damit $\vec{u}$ und $\vec{n}$ einen spitzen Winkel bilden; sonst ersetzen wir den Vektor $\vec{u}$ durch seinen Gegenvektor.

Sei $\vec{v}$ ein Richtungsvektor von h so gewählt, dass $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ gilt, damit auch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ einen spitzen Winkel bilden; andernfalls ersetzen wir $\vec{v}$ durch seinen Gegenvektor.

Da h ganz in e liegt, ist $\vec{v}$ ein Richtungsvektor der Ebene e. Nach Definition (15.10) muss $\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$ gelten.

Sei $f: \vec{X} = \vec{A} + \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{n}$ die Lotebene zu e durch g.

Da f sich nach Satz (20.7) mit e in h schneidet, ist der Vektor $\vec{v}$ auch ein Richtungsvektor der Ebene f. Also gibt es Skalare α und β, so dass $\vec{v} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{n}$ gilt.



Wegen $0 = \vec{n}\cdot\vec{v} = \vec{n}\cdot(\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{n}) = \alpha\,(\vec{n}\cdot\vec{u}) + \beta\,(\vec{n}\cdot\vec{n})$ müssen α und β unterschiedliche Vorzeichen haben.

Wegen $0 < \vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot(\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{n}) = \alpha\,(\vec{v}\cdot\vec{u}) + \beta\,(\vec{v}\cdot\vec{n}) = \alpha\,(\vec{v}\cdot\vec{u})$ muss $\alpha > 0$ und daher $\beta < 0$ gelten.

Nun folgt einerseits

$$\sphericalangle(h;l) = \sphericalangle(\vec{v};\vec{n}) = \arccos(0) = 90°$$

und andererseits gemäß Bemerkung (20.3)

$$\begin{aligned}
\sphericalangle(h;l) &= \sphericalangle(\vec{v};\vec{n}) && \\
&= \sphericalangle(\alpha\vec{u}+\beta\vec{n};\vec{n}) && \vec{v} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{n} \\
&= 180° - \sphericalangle(\alpha\,\vec{u}+\beta\vec{n};\beta\vec{n}) && \text{Rechenregel (14.17)(2) ; } \beta < 0 \\
&= 180° - (\sphericalangle(\alpha\vec{u};\beta\vec{n}) - \sphericalangle(\alpha\vec{u};\alpha\vec{u}+\beta\vec{n})) && \text{Rechenregel (14.17)(3) „Winkelsummensatz“} \\
&= 180° - \sphericalangle(\alpha\,\vec{u};\beta\vec{n}) + \sphericalangle(\alpha\,\vec{u};\alpha\vec{u}+\beta\vec{n}) && \text{Äußere Klammer aufgelöst} \\
&= 180° - (180° - \sphericalangle(\vec{u};\vec{n})) + \sphericalangle(\alpha\,\vec{u};\alpha\,\vec{u}+\beta\vec{n}) && \text{Rechenregel (14.17)(2) ; } \alpha > 0 \text{ ; } \beta < 0 \\
&= \sphericalangle(\vec{u};\vec{n}) + \sphericalangle(\alpha\,\vec{u};\vec{v}) && \vec{v} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{n} \\
&= \sphericalangle(\vec{u};\vec{n}) + \sphericalangle(\vec{v};\vec{u}) = \sphericalangle(g;l) + \sphericalangle(h;g) &&
\end{aligned}$$

Der Winkel zwischen der Geraden g und ihrer Projektion h in der Ebene e ist also der Komplementärwinkel des Winkels zwischen der Geraden g und dem Lot des Schnittpunktes von g und e auf die Ebene e:

$$\sphericalangle(g;h) = 90° - \sphericalangle(g;l)$$

Die folgende Bemerkung gibt an, wie dieser Winkel mit Hilfe des Normalenvektors der Ebene e und des Richtungsvektors der Geraden berechnet werden kann:

(20.10) Lemma

Sei $e: \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$ eine Ebene und $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ eine Gerade, die die Ebene in einem Punkt S nicht senkrecht schneidet. Die Gerade l sei das Lot von S auf e. Dann gilt:

$$90° - \sphericalangle(g;l) = \arcsin\left(\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{n}\|}\right)$$

Beweis:

$$\sin(90° - \sphericalangle(g;l)) = \cos(\sphericalangle(g;l)) = \cos\left(\arccos\left(\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{n}\|}\right)\right) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{n}\|}$$

Nach diesen Vorbereitungen definieren wir den Winkel zwischen Gerade und Ebene wie folgt:

(20.11) Definition

Sei $e: \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$ eine Ebene und $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ eine Gerade, die mit der Ebene (mindestens) den Punkt S gemeinsam hat.

Dann heißt die Zahl $\sphericalangle(g;e) := \arcsin\left(\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{n}\|}\right)$ Winkel zwischen g und e.

Offenbar schließt die Definition im Gegensatz zu den vorbereitenden Bemerkungen die Fälle ein, dass die Gerade g ganz in der Ebene liegt oder senkrecht auf ihr steht. Der Schnittwinkel ist im ersten Fall arcsin(0) = 0°, im zweiten arcsin (1) = 90°.

Die Definition schließt nur aus, dass die Gerade g parallel zur Ebene e verläuft. Offensichtlich ließe sich die Definition auf diesen Fall ausdehnen, indem die Bedingung über die Existenz eines gemeinsamen Punktes fallen gelassen wird. Sie würden dann im parallelen Fall den Winkel 0° liefern. Allerdings wäre zu diskutieren, ob in diesem Fall wirklich von einem „Winkel“ oder nicht besser von einem „Richtungsunterschied“ die Rede sein sollte.

Eine ähnliche Überlegung wurde bereits bei der Einführung des Winkels zwischen Geraden für den Fall paralleler oder windschiefer Geraden geführt.

Die Lemmata (20.9) und (20.10) lassen sich unter Verwendung von Definition (20.11) wie folgt zusammenfassen:

(20.12) Satz

Sei $e: \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$ eine Ebene und $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ eine Gerade, die die Ebene in einem Punkt S nicht senkrecht schneidet. Die Gerade h sei die senkrechte Projektion von g auf e und die Gerade l sei das Lot von S auf e. Dann gilt:

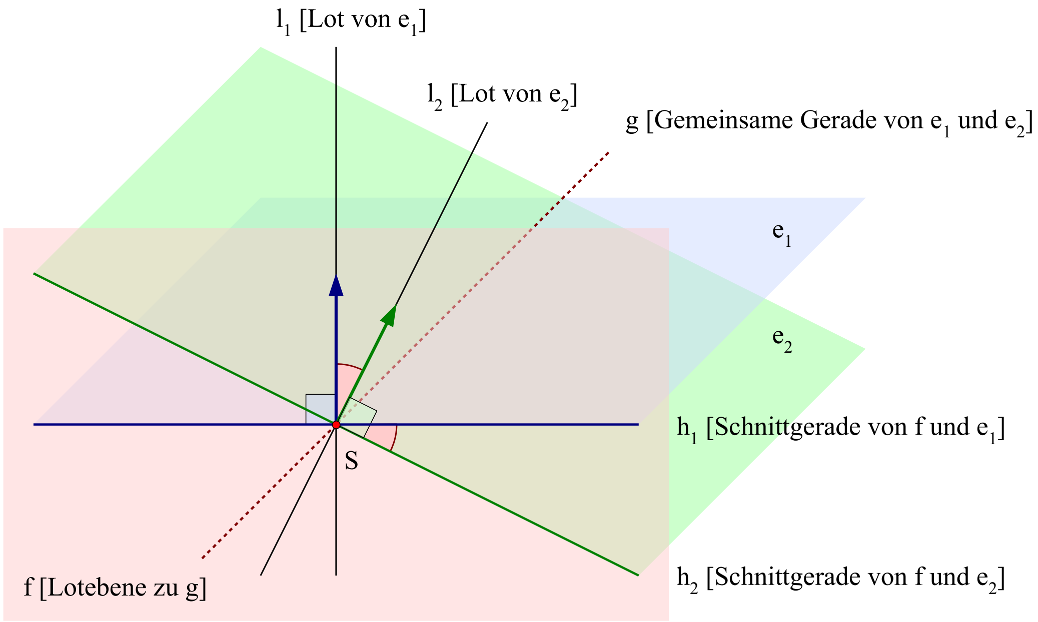
$$\sphericalangle(g;e) = \sphericalangle(g;h) = 90° - \sphericalangle(g;l)$$

Abschnitt 3: Winkel zwischen Ebenen

Sinnvoller Weise betrachten wir zwei Ebenen e_1 und e_2, die sich in einer gemeinsamen Geraden g schneiden. Diese beiden Ebenen schneiden wir mit einer Lotebene f der gemeinsamen Geraden (siehe folgende Illustration).

Offenbar erzeugt die Lotebene f mit beiden Ebenen e_1 und e_2 jeweils eine Schnittgerade h_1 beziehungsweise h_2, die aufgrund ihrer Konstruktion einerseits innerhalb der jeweiligen Ebene verläuft, andererseits eine Normale zur gemeinsamen Geraden g ist.

Unserer Anschauung zufolge liefert der Winkel zwischen den beiden Schnittgeraden h_1 und h_2 den Winkel zwischen den Ebenen e_1 und e_2.



Die beiden Schnittgeraden h_1 und h_2 schneiden sich mit der gemeinsamen Geraden g in einem Punkt S. Errichten wir dort zu jeder der beiden Ebenen eine Normale l_1 beziehungsweise l_2, dann sollten diese beiden Normalen denselben Winkel wie die beiden Schnittgeraden h_1 und h_2 bilden. Der Winkel $\sphericalangle(l_1\,;l_2)$ geht, anschaulich gesprochen, aus dem Winkel $\sphericalangle(h_1\,;h_2)$ durch eine Drehung um 90° hervor.

Der Winkel zwischen den beiden Ebenen e_1 und e_2 könnte daher auf einfache Weise über den Winkel zwischen den beiden Normalen l_1 und l_2 und daher mit Hilfe der Normalenvektoren der Ebenen definiert werden.

Wir werden uns von diesen heuristischen Überlegungen auf dem Weg zu einer analytischen Definition des Winkels zwischen zwei Ebenen leiten lassen.

Der erste große Schritt wird mit dem folgenden Vorbereitungssatz getan. Wir halten uns in der Bezeichnungsweise an die Vorüberlegungen.

<u>(20.13) Lemma</u>

Seien $e_1 : \vec{n}_1 \cdot \vec{X} - \gamma_1 = 0$ und $e_2 : \vec{n}_2 \cdot \vec{X} - \gamma_2 = 0$ zwei Ebenen, die sich in einer Geraden g schneiden.

S sei ein Punkt dieser Geraden g und f ihre Lotebene durch den Punkt S.

Dann steht die Ebene f sowohl senkrecht auf der Ebene e_1 als auch senkrecht auf der Ebene e_2.

Seien h_1 und h_2 die Schnittgeraden, die die Ebene f mit den beiden Ebenen e_1 und e_2 erzeugt.

Weiterhin sei l_1 die Normale von e_1 und l_2 die Normale von e_2 im Punkt S.

Dann sind alle vier Geraden h_1, h_2, l_1 und l_2 Normalen der Geraden g, und es gilt $\sphericalangle(h_1;h_2) = \sphericalangle(l_1;l_2)$.

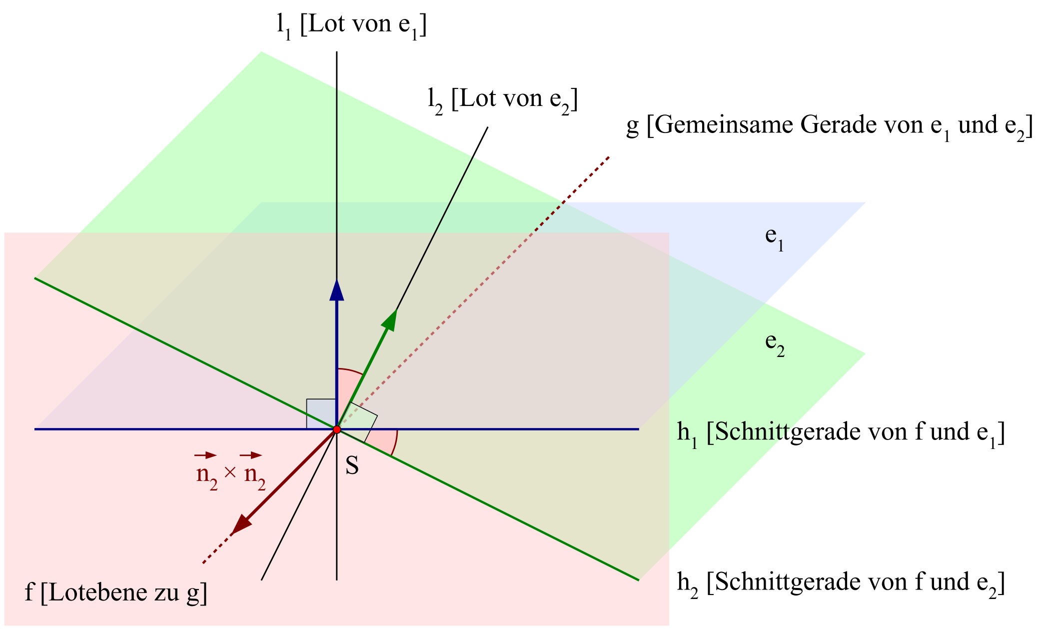
Beweis:

Da sich die Ebenen e_1 und e_2 in einer Geraden schneiden, müssen ihre Normalenvektoren gemäß Satz (17.5) linear unabhängig sein. $f: \vec{X} = \vec{S} + \lambda\,\vec{n}_1 + \mu\,\vec{n}_2$ ist deshalb eine wohldefinierte Ebene, die den Normalenvektor $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ besitzt.

Weil der Vektor $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ sowohl orthogonal zum Vektor $\vec{n}_1$ also auch orthogonal zum Vektor $\vec{n}_2$ ist, steht die Ebene f nach Satz (17.10) senkrecht auf beiden Ebenen e_1 und e_2.

Aus gleichem Grund folgt aus dem 1. Normalenvektorsatz für Ebenen (15.12), dass der Vektor $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ ein gemeinsamer Richtungsvektor der beiden Ebenen sein muss.

Das bedeutet, dass jeder Punkt X, dessen Ortsvektor sich als $\vec{X} = \vec{S} + \rho\,\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ schreiben lässt, ein gemeinsamer Punkt der beiden Ebenen ist. Also ist $\vec{X} = \vec{S} + \rho\,\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ die Gleichung der gemeinsamen Geraden g.



Aus diesem Sachverhalt folgt wiederum, dass die Ebene $f: \vec{X} = \vec{S} + \lambda\,\vec{n}_1 + \mu\,\vec{n}_2$ die Lotebene zur Geraden g durch den Punkt S ist.

Die Normale l_1 von e_1 kann durch die Gleichung $\vec{X} = \vec{S} + \alpha\,\vec{n}_1$ beschrieben werden. Daraus ergibt sich sofort, dass die Normale l_1 in der Ebene f verläuft.

Weil die Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ linear unabhängig sind, kann die Normale l_1 nicht senkrecht auf der Ebene e_2 stehen. Die Ebene f ist daher die eindeutig bestimmte Lotebene zur Ebene e_2 durch die Gerade l_1.

Aus Satz (20.7) folgt, dass die Schnittgerade h_2 der Ebenen f und e_2 die senkrechte Projektion von l_1 auf e_2 ist. Völlig analog erschließt sich, dass die Schnittgerade h_1 die senkrechte Projektion l_2 auf e_1 ist.

Nun liefert Satz (20.12) das gewünschte Ergebnis:

$$\sphericalangle(h_1;h_2) = \sphericalangle(h_1;e_2) = 90° - \sphericalangle(l_1;e_2) = 90° - (90° - \sphericalangle(l_1;l_2)) = \sphericalangle(l_1;l_2)$$

Ein Normalenvektor einer Ebene ist stets ein Richtungsvektor aller Normalen dieser Ebene. Mit Bezug auf Definition (20.2) ergibt sich daher:

<u>(20.14) Bemerkung</u>

Seien $e_1: \vec{n}_1 \cdot \vec{X} - \gamma_1 = 0$ und $e_2: \vec{n}_2 \cdot \vec{X} - \gamma_2 = 0$ zwei Ebenen, die sich in einer Geraden g schneiden.

Seien l_1 eine Normale von e_1 und l_2 eine Normale von e_2, die sich in einem Punkt S von g schneiden.

Dann gilt unabhängig von der Wahl des Punktes S

$$\sphericalangle(l_1;l_2) = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\ \|\vec{n}_2\|}\right)$$

In der Zusammenschau begründen Lemma (20.13) und Bemerkung (20.14), dass sich der Term

$$\arccos\left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\;\|\vec{n}_2\|}\right)$$

für die Definition des Winkels zwischen den Ebenen bestens eignet:

<u>(20.15) Definition</u>

Seien $e_1 : \vec{n}_1\cdot\vec{X}-\gamma_1=0$ und $e_2 : \vec{n}_2\cdot\vec{X}-\gamma_2=0$ zwei nicht parallele Ebenen.

Dann heißt die Zahl $\sphericalangle(e_1\,;e_2) := \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\;\|\vec{n}_2\|}\right)$ Winkel zwischen e_1 und e_2.

Die Definition schließt absichtlich auch die Fälle ein, in denen e_1 und e_2 identisch sind oder senkrecht aufeinander stehen. Der Schnittwinkel ist im ersten Fall arccos(1) = 0° und im zweiten arccos(0) = 90°.

Anders verhält es sich mit parallelen Ebenen. Hier ist es offenbar weniger sinnvoll, von einem Winkel zu sprechen. Die analytische Winkeldefinition wird sich zwar rechnerisch gegen die Einbeziehung dieses Falles nicht wehren, sondern auch den Wert 0° abwerfen; dieser ist dann aber eher als „Richtungsunterschied“ denn als „Winkel“ anzusehen.

Wir halten zum Schluss dieses Paragraphen noch ein bedeutendes Ergebnis fest, dass bei dem Beweis des Lemmas (20.13) abgefallen ist.

<u>(20.16) Korollar</u>

Seien $e_1 : \vec{n}_1\cdot\vec{X}-\gamma_1=0$ und $e_2 : \vec{n}_2\cdot\vec{X}-\gamma_2=0$ zwei Ebenen, die sich in einer Geraden g schneiden.

Dann ist $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ ein Richtungsvektor der Schnittgeraden.