Übungen zu §20

Wie in den Übungen zum vorangegangenen §19 greifen wir hier Übungen aus §17 auf und ergänzen sie durch Winkelberechnungen.

Übung 20.1 (vergleiche Übung 6.4 und Übung 19.3)

Berechne den Winkel zwischen den Geraden g und h, falls diese einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Gib andernfalls an, welcher „Richtungsunterschied" den beiden Geraden zugeordnet werden könnte.

(a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ (b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (d) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -17 \\ -23 \\ 38 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -21 \end{pmatrix}$

(e) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} + \psi \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Übung 20.2 (vergleiche Übung 6.6 und Übung 19.4)

Gegeben ist die Geradenschar $g_t \left(t \in \mathbb{R} \right)$ und die Gerade h.

Berechne den „Richtungsunterschied" zwischen der Schargeraden g_t und der Geraden h in Abhängigkeit vom Parameter t.

(a) $g_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -15 \\ t \\ -5 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$

(b) $g_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t^2 \\ -8 \\ t^2-8 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Übung 20.3 (vergleiche Übung 17.1 und Übung 19.2)

Berechne den Winkel zwischen der Geraden AB und der Ebene e, falls diese einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Gib andernfalls an, welcher „Richtungsunterschied" dem Objekte-Paar zugeordnet werden könnte.

Ermittle je eine Gleichung der Lotebene zu e durch die Gerade AB und der senkrechten Projektion von AB auf e.

(a)	e: $2x - 5y + 6z = 11$	$A = (11; 1; -4)$	$B = (15; 2; -6)$
(b)	e: $5x - 2y - z = -17$	$A = (3; -4; 3)$	$B = (4; -2; 4)$
(c)	e: $8x - 4y - 5z = 23$	$A = (4; 6; -3)$	$B = (7; 7; 1)$
(d)	e: $-4x + 3y + 2z = -16$	$A = (-14; 12; 4)$	$B = (-6; 6; 0)$

Übung 20.4 (vergleiche Übung 17.5 und Übung 19.1)

Die folgenden Gleichungssysteme beschreiben pro Zeile je eine Ebene. Berechne die Winkel, die die Ebenen paarweise einschließen, falls sie sich in einer Geraden schneiden. Ermittle auch eine Gleichung der Schnittgeraden.

(a) $\left\{ \begin{matrix} 2x - 4y + 3z = 6 \\ 6x - 2y + 9z = 18 \\ -4x + 8y - 6z = -72 \end{matrix} \right\}$ (b) $\left\{ \begin{matrix} -x + 2y + z = 4 \\ x - 2y - 4z = -1 \\ 2x - y - 2z = 4 \end{matrix} \right\}$ (c) $\left\{ \begin{matrix} 2x - 4y - 2z = -14 \\ 3x + 2y + 13z = -5 \\ -x - y - 5z = 1 \end{matrix} \right\}$

Übung 20.5

Wie die vorangehenden Übungen zeigen, ist das Berechnen von Schnittwinkeln dank der nutzbaren Formeln ein algebraisches Kinderspiel. Letztlich geht es immer nur darum, für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Term

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$$

zu berechnen und auf seinen Wert eine der trigonometrische Funktionen arccos oder arcsin anzuwenden.

Deutlich anspruchsvoller ist es, zu einem gegebenen Vektor $\vec{a}$ einen zweiten Vektor $\vec{b}$ so konstruieren, dass die beiden Vektoren einen vorgegebenen Winkel einschließen. Aufgrund der Beziehung (siehe Bemerkung (14.7))

$$\sphericalangle(\vec{a}\,,\vec{b}) = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}\right)$$

ist die Gleichung

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{x}\|} = c$$

für den Vektor $\vec{x}$ zu lösen wobei $c\in[-1\,;1]$ der Kosinus eines Winkels aus dem Intervall $[0°\,;180°]$ sei.

Diese Übung leitet entlang eines möglichen Weges zu einer Lösung der Gleichung $\sphericalangle\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix},\vec{x}\right)=45°$.

(a) Lösungsansatz:

Da $\cos(45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ist die Gleichung (0) $\dfrac{\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\cdot\vec{x}}{\left\|\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\|\cdot\|\vec{x}\|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ zu lösen. Wir setzen $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\\lambda x\\\mu x\end{pmatrix}$ mit $x\neq 0$ und $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Auf diese Weise reduzieren wir die Komplexität des algebraischen Problems, schließen allerdings von der Lösungssuche Vektoren aus, deren 1. Koordinate verschwindet.

(b) Aufgabe: Zeige durch Quadrieren und Umformen, dass aus der Gleichung (0) folgt:

(1) $7\lambda^2+(8-8\mu)\lambda+(\mu^2+16\mu+1)=0$

(c) Aufgabe: Zeige mit Hilfe des Lösungsverfahrens für quadratische Gleichungen:

(2) $\lambda=\dfrac{4\mu-4\pm 3\sqrt{\mu^2-16\mu+1}}{7}$

(d) Aufgabe: Ermittle, ausgehend von $\mu\in\{-4\,;0\}$, vier Lösungsvektoren $\vec{x}$ mit ganzzahligen Koordinaten. Zeige, dass sich auf diese Weise der Lösungsvektor $\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$ gewinnen lässt.

(e) Aufgabe: Mache für die vier Lösungsvektoren die Probe!

Übung 20.6

Ermittle selbständig die Gleichung einer Geraden g, die die Ebene e: x + y + z = 0 im Ursprung im Winkel von 30° schneidet.

Hinweis: Es gibt hier keine Lösungen, die nur rationale Koordinaten besitzen!