Übung 20.1

(a) $\sphericalangle(g,h) = \arccos\left(\frac{\left|\begin{pmatrix}6\\0\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-9\\0\\6\end{pmatrix}\right|}{\left\|\begin{pmatrix}6\\0\\-4\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}-9\\0\\6\end{pmatrix}\right\|}\right) = \arccos\left(\frac{78}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{117}}\right) = \arccos(1) = 0°$

(Richtungsunterschied paralleler Geraden)

(b) $\sphericalangle(g,h) = \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}}\right) \approx 47{,}0480°$

(c) $\sphericalangle(g,h) = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{13}}\right) \approx 25{,}0658°$ (Richtungsunterschied windschiefer Geraden)

(d) $\sphericalangle(g,h) = \arccos\left(\frac{444}{\sqrt{296}\cdot\sqrt{666}}\right) = 0°$ (identische Geraden!)

(e) $\sphericalangle(g,h) = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{19}}\right) \approx 67{,}5201°$

Übung 20.2

(a) $\sphericalangle(g,h) = \arccos\left(\frac{|12t+300|}{\sqrt{t^2+250}\cdot\sqrt{504}}\right) = \arccos\left(\frac{|2t+50|}{\sqrt{14t^2+3500}}\right)$

[$= 0°$ für $t = 10$!]

(b) $\sphericalangle g,h = \arccos\left(\frac{24}{\sqrt{2t^4-16t^2+128}\cdot\sqrt{6}}\right)$

$= \arccos\left(\frac{24}{\sqrt{12t^4-96t^2+768}}\right)$ [$= 0°$ für $t=2$ und $t=-2$!]

Übung 20.3

(a) $e: \begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - 11 = 0$; $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix}11\\1\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$

$\sphericalangle(AB, e) = \arcsin\left(\frac{9}{\sqrt{65}\cdot\sqrt{21}}\right) \approx 14{,}0991°$

Lotebene zu e durch AB: $f: \left(\begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}\right)\cdot\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\28\\22\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11\\1\\-4\end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix}4\\28\\22\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + 16 = 0$

Punktrichtungsgleichung $f: \vec{x} = \begin{pmatrix}11\\1\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}$

Die orthogonale Projektion h von AB auf e ist die Schnittgerade der Ebenen e und f:

$$\begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}11\\1\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}\right]-11=0 \iff -7-9\lambda+65\mu-11=0$$
$$\iff 9\lambda = 65\mu - 18$$
$$\iff \lambda = \frac{65}{9}\mu - 2$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}11\\1\\-4\end{pmatrix}+\left(\frac{65}{9}\mu-2\right)\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix} \iff \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}278/9\\20/9\\-76/9\end{pmatrix}$$

(b) $e: \begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}+17=0$; $AB: \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-4\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$$\sphericalangle(AB,e) = \arcsin\left(\frac{0}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{6}}\right) = 0^\circ$$ [Übung 17.1: parallele Geraden!]

Lotebene zu e durch AB: $f: \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-4\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}3\\-4\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}\right]+17=0 \iff 20+30\mu+17=0 \iff \mu=-\frac{37}{30}$$

Orthogonale Projektion von AB auf e: $h: \vec{x}=\begin{pmatrix}-95/30\\-46/30\\127/30\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

(c) Nach Übung 17.1 verläuft AB innerhalb der Ebene e. $\sphericalangle(AB,e)=0$

Lotebene zu e durch AB: $f: \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\6\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}8\\-4\\-5\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}8\\-4\\-5\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}4\\6\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}8\\-4\\-5\end{pmatrix}\right]-23=0 \iff 23+105\mu-23=0 \iff \mu=0$$
[a priori klar!]

Orthogonale Projektion von AB auf e: AB

(d) Nach Übung 17.1 ist AB eine Normale der Ebene e.

$$\sphericalangle(AB,e) = \arcsin\left(\frac{58}{\sqrt{29}\sqrt{116}}\right) = \arcsin(1) = 90^\circ$$

Jede Ebene f, die AB enthält ist eine Lotebene zur Ebene e.
Die orthogonale Projektion von AB auf e ist die Punktmenge $\left\{\begin{pmatrix}-30\\24\\12\end{pmatrix}\right\}$.

Übung 20.4

(a) Gemäß Übung 17.5 gilt $e_1 \parallel e_3$; e_2 schneidet beide Ebenen e_1 und e_3 jeweils in einer Geraden

$$\sphericalangle(e_1, e_2) = \arccos\left(\frac{47}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{121}}\right) \approx 37,4932^\circ$$

$$\sphericalangle(e_2, e_3) = \arccos\left(\frac{94}{\sqrt{121}\cdot\sqrt{116}}\right) \approx 37,4932^\circ$$

(b) Gemäß Übung 17.5 schneiden sich je zwei Ebenen in einer Geraden.

$$\sphericalangle(e_1, e_2) = \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{21}}\right) \approx 36,6992^\circ$$

$$\sphericalangle(e_1, e_3) = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}\right) \approx 35,2644^\circ$$

$$\sphericalangle(e_2, e_3) = \arccos\left(\frac{12}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{21}}\right) \approx 29,2059^\circ$$

(c) Gemäß Übung 17.5 schneiden sich je zwei Ebenen in einer Geraden

$$\sphericalangle(e_1, e_2) = \arccos\left(\frac{28}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{182}}\right) \approx 64,9342^\circ$$

$$\sphericalangle(e_1, e_3) = \arccos\left(\frac{12}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{27}}\right) \approx 61,8745^\circ$$

$$\sphericalangle(e_2, e_3) = \arccos\left(\frac{70}{\sqrt{182}\cdot\sqrt{27}}\right) \approx 3,0597^\circ$$

Übung 20.5

Für $\mu = -4$ ergibt sich $\lambda = \frac{-20 \pm 27}{7} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{47}{7} \vee \lambda = 1$

Wählen wir für die 1. Koordinate den Wert $x := 1$, erhalten wir $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda x \\ \mu x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Übung 20.6

Das Verfahren führt auf die Gleichung $\lambda = -(4\mu + 4) \pm \sqrt{15\mu^2 + 24\mu + 15}$

Ausgehend von $\mu := 0$, erhalten wir die Gerade $g: \vec{x} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -4+\sqrt{15} \\ 0 \end{pmatrix}$.