§19 Abstände

Abschnitt 1: Vorüberlegungen

Wir haben längst geklärt, was wir unter dem Abstand zweier Punkte (siehe Definition (14.2)), dem Abstand eines Punktes von einer Ebene (siehe Definition (15.23)) und dem Abstand eines Punktes von einer Geraden (siehe Definition (18.12)) verstehen wollen.

Wie steht es aber um den Abstand zweier Geraden, dem Abstand zweier Ebenen, dem Abstand einer Geraden von einer Ebene oder, ganz allgemein, dem Abstand zweier Punktmengen im Modellraum, die beide mehr als einen Raumpunkt enthalten?

Wenn wir darüber nachdenken, welchen Abstand zwei Autos auf einem Parkplatz voneinander haben, dann suchen wir unwillkürlich nach der kürzesten Strecke, mit der wir die beiden Autos verbinden könnten.

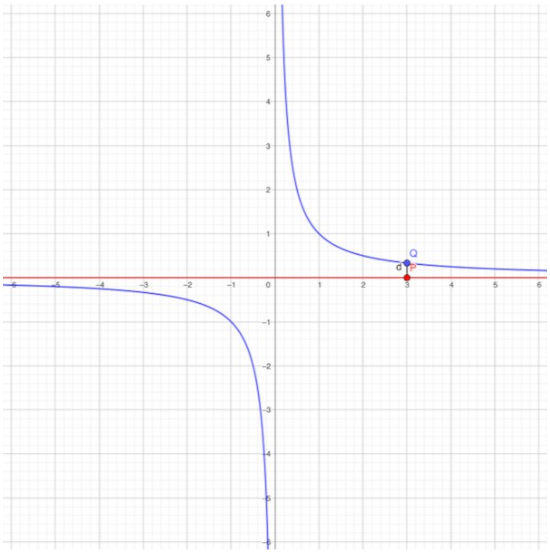
Diesem Gedanken folgend, sind wir motiviert, den Abstand zweier Punktmengen a und b des Modellraumes wie folgt über das „**Minimalprinzip**“ zu definieren:

$$d(a, b) := \text{Minimum}\,\{d(P, Q) \mid P \in a \wedge Q \in b\}$$

Das ist aber nicht unproblematisch, weil uns das folgende Beispiel klar macht, dass das Minimum der Punktabstände nicht existieren muss:

$$a := \text{Abszisse im } \mathbb{R}^2 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$$

$$b := \text{Standardhyperbel im } \mathbb{R}^2 = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 1\}$$



Aus der Analysis wissen wir, dass die beiden Punktmengen a und b einerseits keinen gemeinsamen Punkt haben; andererseits gibt es zu jeder (noch so kleinen) positiven Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}$ eine positive reelle Zahl x, sodass $\frac{1}{x} < \varepsilon$ gilt.

Das bedeutet aber sofort: $\quad d\left((x\,;0), (x\,;\frac{1}{x})\right) = \frac{1}{x} < \varepsilon$

Die beiden Punktmengen a und b kommen sich also beliebig nahe, ohne dass sie sich in einem Punkt berühren.

Natürlich hat die Mathematik einen Weg gefunden, das Problem zu überwinden, das sich hier auftut. Wir müssen ihn jedoch in diesem Paragraphen (noch) nicht beschreiten, weil die Objekte, mit denen wir hantieren, „gerade“ und nicht „gekrümmt“ sind.

Ohne uns die Zukunft zu verbauen, werden wir hier die Abstände zwischen Punktmengen so definieren, dass diese Definitionen in eine übergreifende Begriffsbildung widerspruchsfrei aufgehen können.

Bevor wir damit beginnen, müssen wir noch eine Überlegung einschieben. Vom formalen Standpunkt aus betrachtet, sind wir, was den Abstandsbegriff anbelangt, bislang etwas „schlampig“ unterwegs. Einerseits ordnet die Abstandsfunktion „d“ jedem Paar von Raumpunkten eine nicht negative reelle Zahl zu, zum Beispiel:

$$d(A, B) = d\left((1\,;2\,;-3), (4\,;-5\,;6)\right) = \sqrt{139}$$

Andererseits operiert die Abstandsfunktion „d“ auf Paaren, die aus einem Raumpunkt und einer Punktmenge bestehen:

$$d(Q, e) = d\left((3\,;-5\,;1), \left\{X \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{X} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 11 = 0\right\}\right) = \frac{16}{5}$$

Wir haben hier bewusst eine pedantische Schreibweise gewählt, die verdeutlicht, in welche Unbequemlichkeiten wir geraten, wenn der Formalismus übertrieben wird.

Es stellt sich daher die Frage, wie wir der Abstandsfunktion „d“ einerseits einen klar umrissenen Definitionsbereich zuweisen können, ohne andererseits im Formalismus zu ersticken. Hier der „Königsweg“:

In einem ersten Schritt vereinbaren wir, dass wir die Abstandsfunktion „d“ grundsätzlich als eine Abbildung verstehen wollen, die **je zwei Punktmengen** des Modellraumes $\mathbb{R}^3$ eine nicht negative reelle Zahl zuordnet. Damit ist der Definitionsbereich der Abstandsfunktion eindeutig beschrieben.

Diese Festlegung hat aber zur Folge, dass wir nun einzelne Punkte stets als einelementige Punktmengen ansehen müssen, wenn sie als Argumente der Abstandsfunktion verwendet werden.

Beispielsweise bedeutet das, dass wir formal präzise nicht den Abstand d(P ; Q) zweier Punkte, sondern den Abstand d({P} ; {Q}) zweier einelementiger Punktmengen betrachten.

In einem zweiten Schritt vereinbaren wir, dass wir im Bewusstsein unserer formalen Grundsatzentscheidung aus Gründen der Bequemlichkeit auf die Einhüllung einzelner Punkte in einelementige Punktmengen sowohl in der Sprech- als auch in der Schreibweise verzichten, solange keine Missverständnisse zu befürchten sind. In diesem Sinne schreiben wir auch zum Beispiel weiterhin d(P ; e) anstatt d({P} ; e) und sprechen nach wie vor von dem Abstand eines Punktes P von einer Ebene e.

Wir schließen die allgemeinen Vorüberlegungen mit einer grundsätzlichen Festsetzung ab, die offensichtlich im Einklang mit dem Minimalprinzip steht:

> (19.1) Definition
> Sind a und b zwei geometrische Objekte, die (mindestens) einen gemeinsamen Punkt besitzen, so sei ihr Abstand 0: d(a , b) = 0

Diese Vereinbarung steht nicht im Widerspruch zu vorhandenen Ergebnissen:

- Sind P und Q zwei Punkte, so gilt $d(P, Q) = 0 \;\Leftrightarrow\; P = Q$. [siehe (14.2) und (14.16)(1)]
- Ist Q ein Punkt und e eine Ebene, so gilt $d(Q, e) = 0 \;\Leftrightarrow\; Q \in e$. [siehe (15.24)]
- Ist Q ein Punkt und g eine Gerade, so gilt $d(Q, g) = 0 \;\Leftrightarrow\; Q \in g$. [siehe (18.13)]

Abschnitt 2: Abstand zweier Ebenen

Aus der Definition (19.1) ergibt sich sofort:

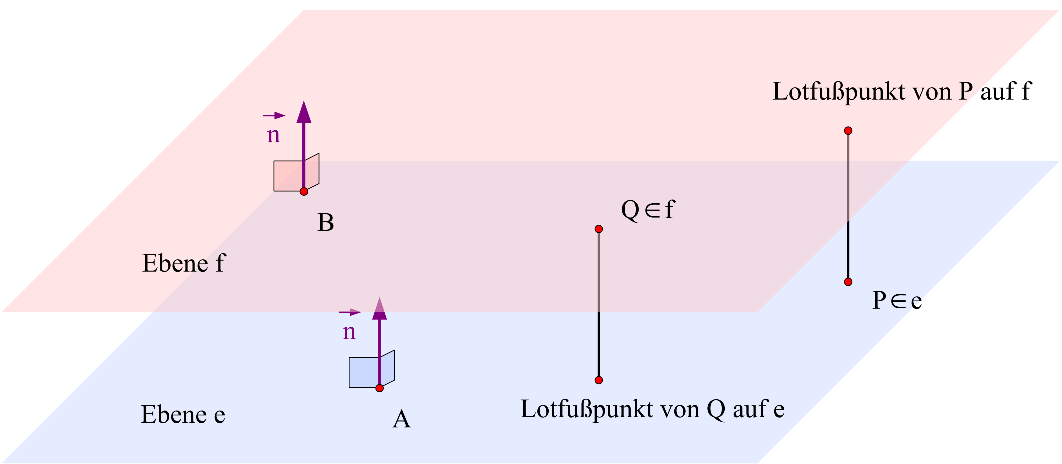
> (19.2) Bemerkung
> Sind zwei Ebenen e und f identisch oder schneiden sie sich, dann ist ihr Abstand 0, kurz: d(e ; f) = 0

Es bleibt also nur der Fall paralleler Ebenen zu betrachten. Unsere Anschauung sagt uns, umgangssprachlich ausgedrückt: „Der Abstand zwischen parallelen Ebenen ist überall gleich."

Die folgende Illustration bringt diese Anschauung zum Ausdruck. In ihr werden zwei parallele Ebenen e und f dargestellt. Auf der Ebene e ist willkürlich ein Punkt P und auf der Ebene f ist willkürlich ein Punkt Q ausgewählt.

Beide Punkte besitzen jeweils einen Lotfußpunkt auf der jeweils anderen Ebene. Über diese Lotfußpunkte sind die Abstände vom Punkt P zur Ebene f und vom Punkt Q zur Ebene e definiert.

In dieser Situation sagt uns unsere Anschauung, dass aufgrund der Parallelität der Ebenen diese Abstände gleich groß sein müssen.



(19.3) Satz

Gegeben seien zwei parallele oder identische Ebenen $e : \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$ und $f : \vec{n} \cdot \vec{X} - \delta = 0$ durch Normalengleichung mit dem gleichen Normalenvektor $\vec{n}$.

Dann haben alle Punkte der Ebene e den gleichen Abstand zur Ebene f und alle Punkte der Ebene f denselben gleichen Abstand zur Ebene e. Es gilt: $d(P, f) = \frac{|\gamma - \delta|}{\|\vec{n}\|} = d(Q, e) \quad \forall P \in e, \forall Q \in f$.

Beweis:

Dass parallele Ebenen durch Normalengleichungen mit demselben Normalenvektor beschrieben werden können, wurde bereits in Korollar (17.6) festgestellt.

Ist nun P ein Punkt der Ebene e, so erfüllt er die Normalengleichung von e: $\vec{n} \cdot \vec{P} - \gamma = 0$.

Mit einem kleinen Trick (Addition von $-\gamma + \gamma = 0$) folgt aus der Hesse-Formel (16.1):

$$d(P, f) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{P} - \delta|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{P} - \gamma + \gamma - \delta|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|0 + \gamma - \delta|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\gamma - \delta|}{\|\vec{n}\|}$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir für alle Punkte Q der Ebene f auch den Wert $d(Q, e) = \frac{|\gamma - \delta|}{\|\vec{n}\|}$.

Der Satz (19.3) ist konsistent mit Bemerkung (19.2), weil auch Satz (19.3) den Abstandswert 0 liefert, wenn die Ebenen e und f identisch sind. Dann gilt nämlich $\gamma = \delta$, weil in beiden Normalengleichungen derselbe Normalenvektor verwendet $\vec{n}$ wird.

Darüber hinaus legitimiert Satz (19.3) die nun folgende Definition des Abstands zweier paralleler Ebenen, weil er garantiert, dass der definierte Abstand nicht von der Wahl des verwendeten Punktes abhängt:

(19.4) Definition

Gegeben seien zwei parallele Ebenen e und f.

Dann sei der Abstand der beiden Ebenen der Abstand, den alle Punkte von e in gleicher Weise von f und alle Punkte von f in gleicher Weise von e haben:

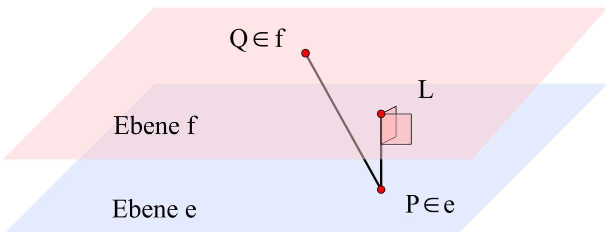
d(e, f) := d(P, f) für irgendeinen Punkt P der Ebene e

d(f, e) := d(Q, e) für irgendeinen Punkt Q der Ebene f

Diese Definition respektiert übrigens das Minimalprinzip, weil wir schon mit dem Satz (15.22) sichergestellt haben, dass es keine zwei Punkte $P \in e$ und $Q \in f$ geben kann, für die $d(P, Q) < d(e, f)$ gilt.

Sind nämlich zwei Punkte $P \in e$ und $Q \in f$ gegeben, und ist L der Lotfußpunkt von P auf f, so gilt nach Satz (15.22):

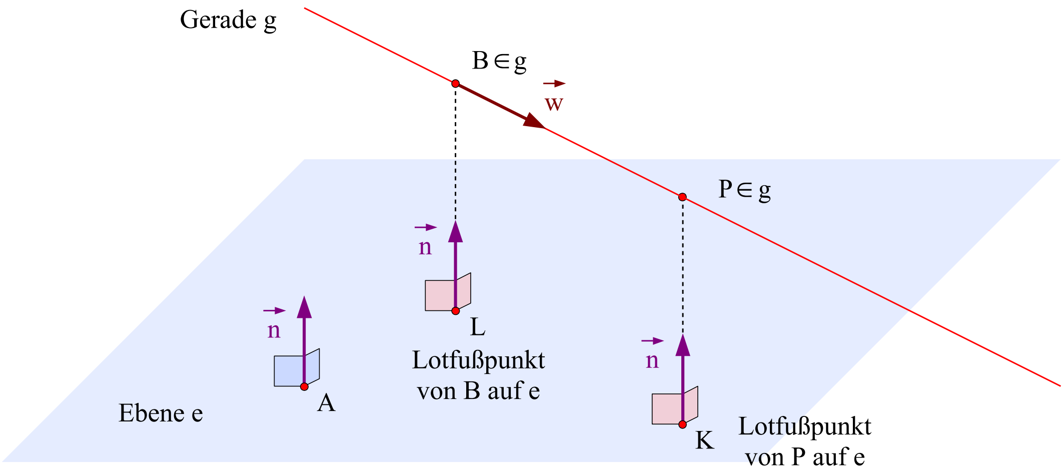
$$d(P, Q) \geq d(P, L) = d(P, f) = d(e, f)$$



Abschnitt 3: Abstand zwischen Gerade und Ebene

Aus der Definition (19.1) folgt sofort, dass der Abstand zwischen einer Geraden und einer Ebene gleich 0 ist, wenn die beiden Objekte (mindestens) einen gemeinsamen Punkt besitzen. Daher bleibt nur der Fall zu betrachten, in dem die Gerade parallel zur Ebene verläuft.

Wie bei parallelen Ebenen sagt uns unsere Anschauung, dass auch der Abstand zwischen einer Ebenen und einer parallel zu ihr verlaufenden Geraden, umgangssprachlich gesprochen, „überall gleich“ sein müsse. Das bringt der folgende Satz fachlich korrekt zum Ausdruck.



(19.5) Satz

Sei $g: \vec{X} = \vec{B} + \lambda\,\vec{u}$ eine Gerade, die parallel zur Ebene $e: \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$ oder in dieser Ebene verläuft.
Dann haben alle Punkte der Geraden g denselben Abstand zur Ebene e wie der Stützpunkt B:

$$d(P, e) = d(B, e) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{B} - \gamma|}{\|\vec{n}\|} \quad \forall\, P \in g$$

Beweis:
Sei P ein beliebiger Punkt der Geraden g.
Dann ist $\overrightarrow{BP}$ ein Richtungsvektor von g und aufgrund der Lagebeziehung zwischen g und e auch ein Richtungsvektor von e. Als solcher ist $\overrightarrow{BP}$ orthogonal zum Normalenvektor $\vec{n}$, das heißt, es gilt $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$.
Mit der Hesse-Formel (16.1) folgt:

$$d(P, e) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{P} - \gamma|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{B} + \overrightarrow{BP}) - \gamma|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{B} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{BP} - \gamma|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{B} - \gamma|}{\|\vec{n}\|}$$

Der Satz (19.5) legitimiert die folgende Definition:

(19.6) Definition

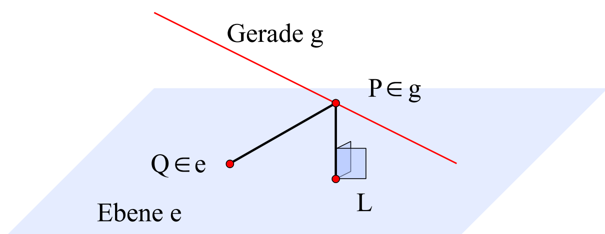
Gegeben seien eine Ebene e und eine Gerade g, die parallel zur Ebene e oder in der Ebene e verläuft.
Dann sei der Abstand der Geraden g von der Ebene e der Abstand, den alle Punkte der Geraden g von der Ebene e haben:

$d(g, e) := d(P, e)$ für irgendeinen Punkt P der Geraden g

Verläuft die Gerade g in der Ebene e, dann liefert die Definition (19.6) den Abstand $d(g, e) = 0$. Das ist konsistent mit der Definition (19.1). Also ist auch der Abstand zwischen einer Geraden und einer Ebene für jede ihrer Lagebeziehungen in konsistenter Weise definiert.

Auch Definition (19.6) respektiert das Minimalprinzip, weil wir schon mit dem Satz (15.22) sichergestellt haben, dass es keine zwei Punkte $P \in g$ und $Q \in e$ geben kann, für die $d(P, Q) < d(g, e)$ gilt.
Sind nämlich zwei Punkte $P \in g$ und $Q \in e$ gegeben, und ist L der Lotfußpunkt von P auf e, so gilt nach Satz (15.22):

$$d(P, Q) \geq d(P, L) = d(P, e) = d(g, e)$$



Abschnitt 4: Abstand zweier Geraden

Zuerst werden wieder die „trivialen“ Fälle aussortiert. Aus der Definition (19.1) folgt sofort, dass der Abstand zwischen zwei Geraden 0 beträgt, wenn die beiden Geraden (mindestens) einen gemeinsamen Punkt besitzen. Daher bleiben nur die beiden Fälle zu betrachten, in denen die Geraden parallel oder windschief sind.

Wie mit parallelen Objekten umzugehen ist, haben wir schon zweimal erfahren. Diese Erfahrung nutzen wir bei der Behandlung parallelen Geraden.

(19.7) Satz

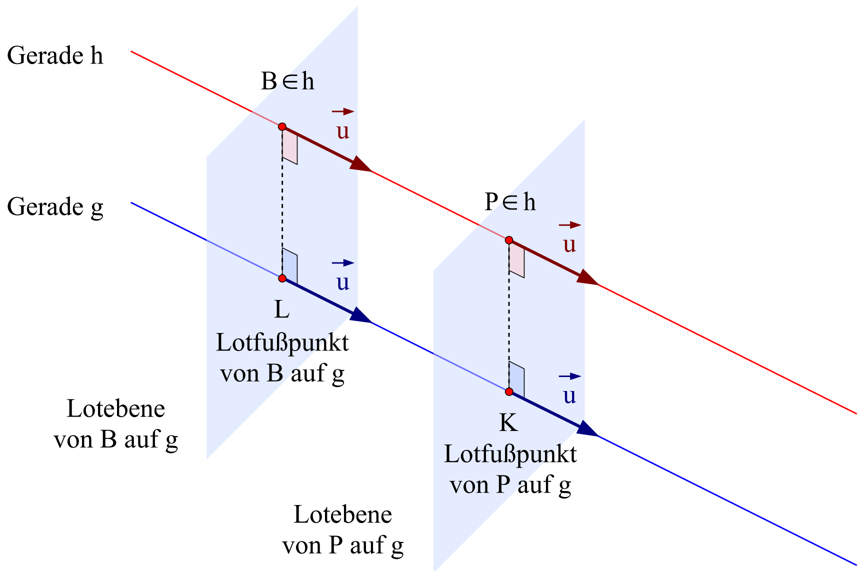
Seien g und h zwei parallele oder identische Geraden.

Dann haben alle Punkt der Geraden h denselben Abstand zur Geraden g und alle Punkte der Geraden g denselben Abstand zur Geraden h. Die beiden Abstandswerte sind identisch.

Beweis:

Habe g die Punktrichtungsgleichung $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$.

Der Richtungsvektor $\vec{u}$ von g ist auch ein Richtungsvektor von h, weil h parallel zu g ist. Also kann die Gerade h unter Verwendung eines Stützpunktes $B \in h$ durch die Gleichung $\vec{X} = \vec{B} + \mu\,\vec{u}$ beschrieben werden.



Sei L der Lotfußpunkt von B auf g. Dann gilt $d(B, g) = \|\overrightarrow{BL}\|$. Der Vektor $\overrightarrow{BL}$ ist ein vom Nullvektor verschiedener Normalenvektor von g und damit orthogonal zum Richtungsvektor $\vec{u}$. Also gilt also $\overrightarrow{BL} \cdot \vec{u} = 0$.

Sei nun P irgendein Punkt von h und K sein Lotfußpunkt auf g. Dann gilt $d(P, g) = \|\overrightarrow{PK}\|$. Der Vektor $\overrightarrow{PK}$ ist ein Normalenvektor von g und damit orthogonal zum Richtungsvektor $\vec{u}$. Also gilt auch $\overrightarrow{PK} \cdot \vec{u} = 0$.

$\overrightarrow{PB}$ ist ein Richtungsvektor von h und damit ein Vielfaches des Vektors $\vec{u}$, das heißt: $\overrightarrow{PB} = \beta\,\vec{u}$ mit $\beta \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{LK}$ ist ein Richtungsvektor von g und damit ein Vielfaches des Vektors $\vec{u}$, das heißt: $\overrightarrow{LK} = \alpha\,\vec{u}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$

Es folgt $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{BL} + (\alpha + \beta)\,\vec{u}$ und damit:

$$\|\overrightarrow{PK}\|^2 = \overrightarrow{PK}^2 = \overrightarrow{PK} \cdot (\overrightarrow{BL} + (\alpha+\beta)\,\vec{u}) = \overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{BL} + 0 = (\overrightarrow{BL} + (\alpha+\beta)\,\vec{u}) \cdot \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BL}^2 + 0 = \overrightarrow{BL}^2 = \|\overrightarrow{BL}\|^2$$

Damit ist $d(P, g) = \|\overrightarrow{PK}\| = \|\overrightarrow{BL}\| = d(B, g)$ bewiesen.

Also haben alle Punkte von h den gleichen Abstand zur Geraden g.

Auf gleiche Weise ergibt sich, dass alle Punkte von g auch den gleichen Abstand zur Geraden h haben.

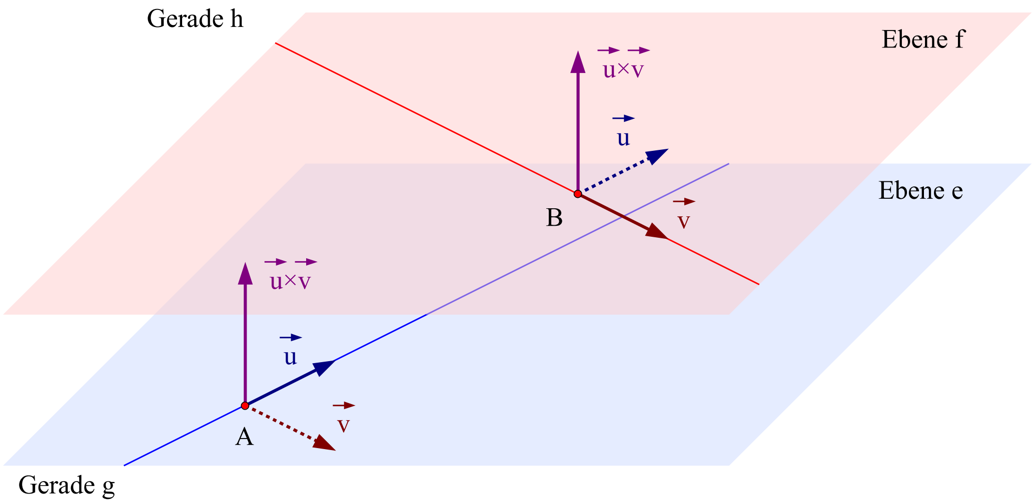
Es ist nur noch zu prüfen, dass die beiden Abstandswerte identisch sind. Das ist aber richtig, weil nicht nur der Punkt L der Lotfußpunkt von B auf g, sondern umgekehrt auch B der Lotfußpunkt von L auf h ist. Das wiederum liegt daran, dass wegen des gemeinsamen Richtungsvektors von g und h die Lotebene von B zur Geraden g auch die Lotebene von L zur Geraden h ist. Deswegen gilt $d(B, g) = d(L, h)$.

Der Satz (19.7) liefert für den identischen Fall, den wir in der Formulierung des Satzes bewusst eingeschlossen haben, den Abstand 0. Das ist konsistent mit der Definition (19.1). Also können wir ohne Bedenken den Abstand von Geraden definieren, die parallel oder identisch sind:

> (19.8) Definition
>
> Gegeben seien zwei Geraden g und h, die parallel oder identisch sind.
>
> Dann sei ihr Abstand der Abstand, den alle Punkte von g in gleicher Weise von der Geraden h und alle Punkte von der Geraden h in gleicher Weise von der Geraden g haben:
>
> $d(g, h) := d(P, h) = d(Q, g)$ mit $P \in g, Q \in h$

Der Satz (18.11) stellt sicher, dass die Definition (19.8) das Minimalprinzip respektiert!

Jetzt bleibt nur noch zu klären, welchen Abstandswert wir zwei windschiefen Geraden zuordnen wollen. Die folgende Grafik zeigt, wie wir uns der Problemlösung heuristisch nähern.



Wir gehen davon aus, dass die beiden windschiefen Geraden durch Punktrichtungsgleichungen gegeben sind:

$g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ $\qquad$ $h : \vec{X} = \vec{B} + \mu\,\vec{v}$

Da die beiden Geraden windschief sein sollen, haben sie keinen gemeinsamen Punkt und ihre Richtungsvektoren sind linear unabhängig. Wegen ihrer linearen Unabhängigkeit taugen die beiden Richtungsvektoren zur Bildung von Ebenen:

$e : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$ $\qquad$ $f : \vec{X} = \vec{B} + \rho\,\vec{u} + \sigma\,\vec{v}$

Offenbar enthält die Ebene e die Gerade g und die Ebene f die Gerade h. Außerdem sind die beiden Ebenen wegen ihrer identischen Richtungsvektoren parallel oder identisch.

Identisch können sie natürlich nicht sein, weil andernfalls der Punkt B ein Punkt der Ebene e sein würde. Das hätte aber zur Folge, dass es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gäbe mit der Eigenschaft

$$\vec{B} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} - \mu\,\vec{v} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$$

Das hieße aber, dass sich die Geraden im Widerspruch zur Voraussetzung im Punkt S mit $\vec{S} := \vec{B} - \mu\,\vec{v} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ schneiden. Also müssen die Ebenen e und f parallel sein.

Als parallele Ebenen besitzen die Ebenen e und f einen Abstand, der von 0 verschieden ist. Weil $\vec{n} := \vec{u} \times \vec{v}$ ein gemeinsamer Normalenvektor von e und f ist, besitzen sie die Normalengleichungen

$e : (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{X} - (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{A} = 0$ $\qquad$ $f : (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{X} - (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} = 0$

Gemäß Definition (19.4) und Satz (19.3) beträgt der Abstand der parallelen Ebenen e und f

$$d(e, f) = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} - (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{A}|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AB}|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

Wir fassen unsere Überlegungen in einem Satz zusammen:

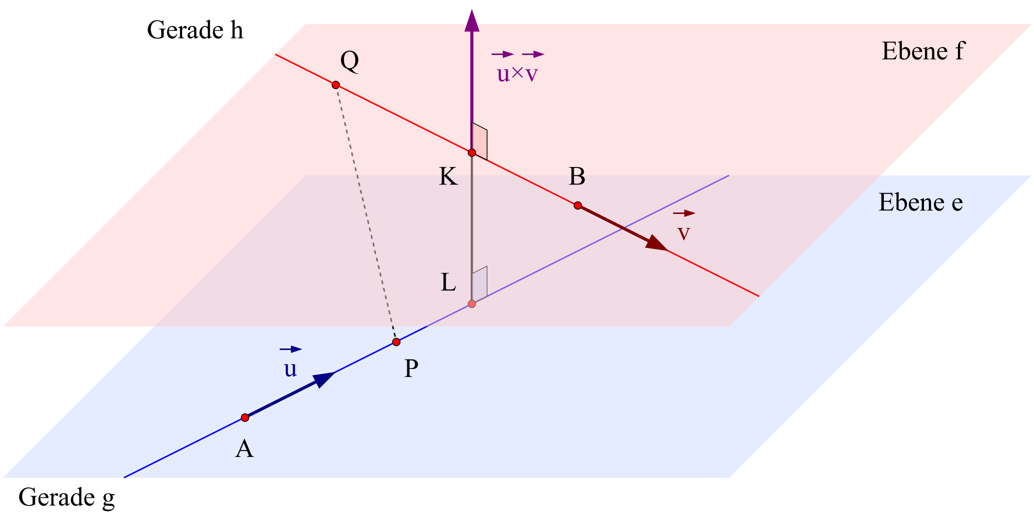
> (19.9) Satz
> Gegeben seien zwei windschiefe Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\, \vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu\, \vec{v}$.
> Die Ebene $e: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\, \vec{u} + \mu\, \vec{v}$ enthält die Gerade g und die Ebene $f: \vec{X} = \vec{B} + \rho\, \vec{u} + \sigma\, \vec{v}$ die Gerade h.
> Die beiden Ebenen e und f sind parallel und ihr Abstand beträgt $d(e, f) = \dfrac{\left|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AB}\right|}{\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|}$.

Bevor wir nun, ausgehend vom Satz (19.9), den Abstand windschiefer Geraden definieren, vergewissern wir uns noch, ob ein so über Ebenen definierter Abstandswert für windschiefe Geraden das Minimalprinzip respektiert.

Die Angelegenheit ist deswegen heikel, weil ja das Minimalprinzip für den Abstand $d(a, b)$ zweier geometrischer Objekte a und b zwei Forderungen stellt:

1. Es gibt (mindestens) einen Punkt A in a und (mindestens) einen Punkt B in b derart, dass $d(A, B) = d(a, b)$ gilt. Stichwort: „Realisierung“
2. Für je zwei Punkte P und Q, wobei P aus a und Q aus B beliebig gewählt sind, gilt $d(P, Q) \geq d(a, b)$. Stichwort: „Minimierung“

Bezüglich unseres Vorhabens, den Abstand zweier windschiefer Geraden über zwei Ebenen zu definieren, stellen sich daher drei Fragen, die durch die folgende Grafik illustriert werden:



- Gibt es einen Punkt L auf der Geraden g und einen Punkt K auf der Geraden h, sodass der Abstand von L und K genauso groß wie der Abstand der Ebenen e und f ist?
- Wählen wir einen beliebigen Punkt P auf der Geraden g und einen beliebigen Punkt Q auf der Geraden h, ist dann der Abstand zwischen P und Q immer mindestens so groß wie der Abstand der Ebenen e und f?
- In welcher Lagebeziehung stünde die Gerade LK zu den Geraden g und h, falls sie existiert?

Die Antworten liefert der folgende Satz; er konstruiert zwei Ebenen a und b, die wie e und f in der obigen Überlegung jeweils eine der beiden windschiefen Geraden enthalten.

Allerdings sind a und b nicht parallel zueinander, weil der Richtungsvektor, der von der nicht enthaltenen Geraden stammt, durch das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren ersetzt wird.

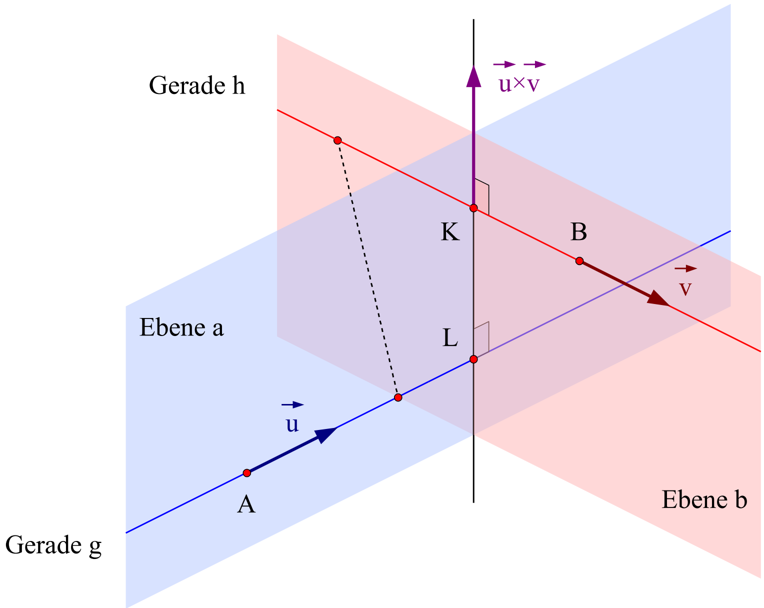
Die Illustration auf der nächsten Seite verdeutlicht, welche Lagebeziehungen durch diesen konstruktiven Kniff erzeugt werden.

<u>(19.10) Satz</u>

Gegeben seien zwei windschiefe Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu\,\vec{v}$.

Ist L der Durchstoßpunkt der Geraden g in der Ebene $b: \vec{X} = \vec{B} + \mu\,\vec{v} + \sigma\,\vec{u} \times \vec{v}$ und K der Durchstoßpunkt der Geraden h in der Ebene $a: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \rho\,\vec{u} \times \vec{v}$, dann ist LK die einzige **gemeinsame** Normale, die die Geraden g und h besitzen und es gilt:

$$d(P,Q) \geq d(L,K) \quad \forall\, P \in g, \forall\, Q \in h$$



Beweis:

Weil die Geraden g und h windschief sein sollen, sind ihre Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig. Da der Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren ist, sind die drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{u} \times \vec{v}$ linear unabhängig.

Die Ebenen a und b sind daher wohldefiniert. Außerdem sorgt die lineare Unabhängigkeit der Richtungsvektoren dafür, dass die Gerade g die Ebene b in einem Punkt L und die Gerade h die Ebene a in einem Punkt K durchstößt.

Es gibt daher Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \rho, \sigma \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{L} = \vec{A} + \lambda_1\,\vec{u} = \vec{B} + \mu_1\,\vec{v} + \sigma\,\vec{u} \times \vec{v} \quad (1) \qquad \text{Folgerung: } \lambda_1\,\vec{u} - \mu_1\,\vec{v} - \sigma\,\vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{AB} \quad (3)$$

$$\vec{K} = \vec{B} + \mu_2\,\vec{v} = \vec{A} + \lambda_2\,\vec{u} + \rho\,\vec{u} \times \vec{v} \quad (2) \qquad \text{Folgerung: } \lambda_2\,\vec{u} - \mu_2\,\vec{v} + \rho\,\vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{AB} \quad (4)$$

Durch Subtraktion „(3) – (4)“ folgt:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\,\vec{u} + (-\mu_1 + \mu_2)\,\vec{v} + (-\sigma - \rho)\,\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

Das Nullvektorkriterium für linear unabhängige Vektoren liefert drei Parameteridentitäten:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \qquad \mu_1 = \mu_2 \qquad \rho = -\sigma$$

Mit den ersten beiden Parameteridentitäten folgt aus (1) und (2):

$$\vec{L} = \vec{A} + \lambda_1\,\vec{u} = \vec{A} + \lambda_2\,\vec{u} \quad (5) \qquad \text{und} \qquad \vec{K} = \vec{B} + \mu_2\,\vec{v} = \vec{B} + \mu_1\,\vec{v} \quad (6)$$

und daher durch Einsetzen von (5) in (1), beziehungsweise von (6) in (2):

$$\vec{L} = (\vec{B} + \mu_1\,\vec{v}) + \sigma\,\vec{u} \times \vec{v} = \vec{K} + \sigma\,\vec{u} \times \vec{v} \qquad \text{und} \qquad \vec{K} = (\vec{A} + \lambda_2\,\vec{u}) + \rho\,\vec{u} \times \vec{v} = \vec{L} + \rho\,\vec{u} \times \vec{v}$$

Das bedeutet aber (passend zur dritten Parameteridentität $\rho = -\sigma$)

$$\overrightarrow{KL} = \sigma\,\vec{u} \times \vec{v} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{LK} = \rho\,\vec{u} \times \vec{v}$$

Als Vielfaches des Vektors $\vec{u} \times \vec{v}$ ist der Vektor der $\overrightarrow{LK}$ sowohl orthogonal zum Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g als auch zum Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden h.

Weil L ein Punkt von g und K ein Punkt von h ist, ist die Gerade LK eine gemeinsame Normale der Geraden g und h.

Wir prüfen nun, dass die Gerade LK die einzige gemeinsame Normale der Geraden g und h ist.

Seien $P \in g$ und $Q \in h$ zwei Punkte so gewählt, dass der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ orthogonal zu den Richtungsvektoren der Geraden g und h ist.

Dann muss $\overrightarrow{PQ}$ wie $\overrightarrow{LK}$ gemäß Bemerkung (15.19) ein Vielfaches des Vektors $\vec{u} \times \vec{v}$ sein:

$$\overrightarrow{PQ} = \varphi\, \vec{u} \times \vec{v}$$

Weil $\overrightarrow{PL}$ ein Richtungsvektor von g ist, gilt $\overrightarrow{PL} = \alpha\, \vec{u}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Weil $\overrightarrow{KQ}$ ein Richtungsvektor von h ist, gilt $\overrightarrow{KQ} = \beta\, \vec{v}$ mit $\beta \in \mathbb{R}$.

Es folgt der Reihe nach:

$$\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KQ} + \overrightarrow{QP} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\, \vec{u} + \rho\, \vec{u} \times \vec{v} + \beta\, \vec{v} - \varphi\, \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\, \vec{u} + \beta\, \vec{v} + (\rho - \varphi)\, \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

Das Nullvektorkriterium für linear unabhängige Vektoren liefert

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 0 \qquad \rho = \varphi$$

Also gilt $\overrightarrow{PL} = \vec{0}$ sowie $\overrightarrow{KQ} = \vec{0}$ und daher P = L und Q = K.

LK ist also die einzige gemeinsame Normale der windschiefen Geraden g und h.

Im Hinblick auf das Minimalprinzip ist nur noch die Abstandsungleichung zu verifizieren.

Sei P ein beliebiger Punkt der Geraden g und Q ein beliebiger Punkt der Geraden h.

Weil $\overrightarrow{PL}$ ein Richtungsvektor von g ist, gilt $\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{PL} = 0$, denn $\overrightarrow{LK}$ ist ein Normalenvektor von g.

Weil $\overrightarrow{KQ}$ ein Richtungsvektor von h ist, gilt $\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{KQ} = 0$, denn $\overrightarrow{LK}$ ist ein Normalenvektor von h.

Wir berechnen d(P, Q) unter Beachtung der soeben festgestellten Orthogonalitäten:

$$\begin{aligned} d(P, Q)^2 &= \overrightarrow{PQ}^2 = (\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KQ})^2 = \overrightarrow{LK}^2 + 2\, \overrightarrow{LK} \cdot (\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{KQ}) + (\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{KQ})^2 \\ &= \overrightarrow{LK}^2 + 0 + (\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{KQ})^2 = d(L, K)^2 + (\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{KQ})^2 \geq d(L, K)^2 \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.

Die gemeinsame Normale zweier windschiefer Geraden ist auch eine gemeinsame Normale der beiden parallelen Ebenen e und f, die im Satz (19.9) konstruiert wurden.

Der Abstand dieser beiden Ebenen ist daher der minimale Abstand zwischen einem Punkt der einen und einem Punkt der anderen Geraden. Damit haben wir endgültig die folgende Festlegung legitimiert:

(19.11) Definition

Seien $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\, \vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu\, \vec{v}$ zwei windschiefe Geraden.

Dann sei der Abstand zwischen g und h durch die Zahl $d(g, h) := \dfrac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AB}|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$ gegeben.

Die Sätze (19.9) und (19.10) garantieren, dass der so definierte Abstand zweier windschiefer Geraden mit dem Abstand der beiden Lotfußpunkte übereinstimmt, die die einzige gemeinsame Normale der beiden Geraden erzeugt.

Außerdem garantiert Satz (19.10) in expliziter Weise die Einhaltung des Minimalprinzips!

Die Übung 19.4 zeigt in eindrucksvoller Weise, dass die drei verschiedenen Definitionen des Abstands zweier Geraden, die ja jeweils einer bestimmten Lagebeziehung gewidmet sind, auf wundersame Weise kohärent sind. Der Grund für diese Kohärenz liegt in der strikten Einhaltung des Minimalprinzips!