Übungen zu §19

Übung 19.1 (vergleiche Übung 17.5)

Die folgenden Gleichungssysteme beschreiben pro Zeile je eine Ebene. Berechne die Abstände, die die Ebenen paarweise voneinander haben. Nutze die Ergebnisse der Übung (17.5).

(a) $\left\{\begin{matrix} 2x-4y+3z=6 \\ 6x-2y+9z=18 \\ -4x+8y-6z=-72 \end{matrix}\right\}$ (b) $\left\{\begin{matrix} -x+2y+z=4 \\ x-2y-4z=-1 \\ 2x-y-2z=4 \end{matrix}\right\}$ (c) $\left\{\begin{matrix} 2x-4y-2z=-14 \\ 3x+2y+13z=-5 \\ -x-y-5z=1 \end{matrix}\right\}$

Übung 19.2 (vergleiche Übung 17.1)

Berechne den Abstand der Geraden AB von der Ebene e.

(a) e: $2x-5y+6z=11$ A = (11; 1; –4) B = (15; 2; –6)
(b) e: $5x-2y-z=-17$ A = (3; –4; 3) B = (4; –2; 4)
(c) e: $8x-4y-5z=23$ A = (4; 6; –3) B = (7; 7; 1)
(d) e: $-4x+3y+2z=-16$ A = (–14; 12; 4) B = (–6; 6; 0)

Übung 19.3 (vergleiche Übung 6.4)

Berechne den Abstand der Geraden g und h.

Gib im windschiefen Fall die Gleichung der gemeinsamen Normalen und die Koordinaten ihrer Lotfußpunkte an.

(a) $g:\vec{X}=\begin{pmatrix}7\\-1\\6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}6\\0\\-4\end{pmatrix},\quad h:\vec{X}=\begin{pmatrix}-5\\-1\\8\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-9\\0\\6\end{pmatrix}$ (b) $g:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\5\\-4\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix},\quad h:\vec{X}=\begin{pmatrix}9\\-8\\10\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$

(c) $g:\vec{X}=\begin{pmatrix}7\\-2\\5\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad h:\vec{X}=\begin{pmatrix}5\\2\\-6\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$ (d) $g:\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}-6\\-8\\14\end{pmatrix},\quad h:\vec{X}=\begin{pmatrix}-17\\-23\\38\end{pmatrix}+\rho\begin{pmatrix}9\\12\\-21\end{pmatrix}$

(e) $g:\vec{X}=\begin{pmatrix}11\\12\\-12\end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\quad h:\vec{X}=\begin{pmatrix}-10\\5\\-15\end{pmatrix}+\psi\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$

Übung 19.4 (vergleiche Übung 6.6)

Gegeben ist die Geradenschar $g_t\,(t\in\mathbb{R})$ und die Gerade h.

Berechne gemäß Hinweis den Abstand aller Schargeraden g_t von der Geraden h (in Abhängigkeit vom Parameter t).

(a) $g_t:\vec{X}=\begin{pmatrix}t\\1\\-5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-15\\t\\-5\end{pmatrix}\qquad h:\vec{X}=\begin{pmatrix}7\\2\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}18\\-12\\6\end{pmatrix}$

Hinweis:

- Berechne zunächst die Abstände der Schargeraden, die nicht windschief zur Geraden h verlaufen. Zeige dass im parallelen Fall der Abstand $\sqrt{\frac{45}{2}}$ beträgt.
- Leite dann exklusiv (!) für den windschiefen Fall zunächst die Formel $d(g_t,h)=\frac{|6(t-10)(t+5)|}{\sqrt{360(t-10)^2}}$ her.
- Diskutiere die Anwendbarkeit der Formel auf die zuerst bearbeiteten nicht windschiefen Spezialfälle.
- Vereinfache den Term für den windschiefen Regelfall so weit wie sinnvoll möglich.

(b) $g_t:\vec{X}=\begin{pmatrix}3\\0\\t\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}t^2\\-8\\t^2-8\end{pmatrix}\qquad h:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\6\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

Hinweis wie zu (a), jedoch $d(g_t,h)=\frac{|2(t+4)(t^2-4)|}{\sqrt{12(t^2-4)^2}}$. Die Abstände der Parallelen von h: $\sqrt{12}$ und $\sqrt{\frac{4}{3}}$.