Übung 19.1

(a) $e_1: \begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-6=0$; $e_2: \begin{pmatrix}6\\-2\\9\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-18=0$; $e_3: \begin{pmatrix}-4\\8\\-6\end{pmatrix}\cdot\vec{x}+72=0$

Aus Übung 17.5 folgt: $e_1 \parallel e_3$; $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$; $e_3 \cap e_2 \neq \emptyset$

Also gilt $d(e_1, e_2)=0$ und $d(e_3, e_2)=0$.

Wir stellen e_3 mit Hilfe des Normalenvektors von e_1 dar:

$e_3: \begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-36=0$; $d(e_1, e_3)=\dfrac{|36-6|}{\sqrt{29}}=\dfrac{30}{\sqrt{29}}\approx 5{,}5709$

(b) Aus Übung 17.5 folgt, dass je zwei der drei Ebenen sich in einer Geraden schneiden. Daher gilt $d(e_1,e_2)=d(e_1,e_3)=d(e_2,e_3)=0$

(c) siehe (b).

Übung 19.2

(a) Gemäß Übung 17.1 schneidet die Gerade AB die Ebene e in genau einem Punkt S. Also gilt $d(AB, e)=0$.

(b) Gemäß Übung 17.1 verläuft die Gerade AB parallel zur Ebene e.

$$d(AB,e)=d(A,e)=\frac{\left|\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\3\end{pmatrix}-17\right|}{\sqrt{25+4+1}}=\frac{3}{\sqrt{30}}\approx 0{,}5477$$

(c) Gemäß Übung 17.1 verläuft die Gerade AB innerhalb der Ebene e; also gilt $d(AB,e)=0$.

(d) Gemäß Übung 17.1 ist die Gerade AB eine Normale der Ebene e; also gilt auch hier $d(AB,e)=0$.

Übung 19.3

(a) Gemäß Übung 6.4 sind die Geraden g und h parallel.

Ihr Abstand ist gegeben durch den Abstand des Stützpunkts $B=(-5;-1;8)$ von h von der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$d(g,h) = d(B,g) = \frac{\sqrt{52 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}^2 - \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right|^2}}{\sqrt{52}} = \frac{\sqrt{52 \cdot 148 - 56^2}}{\sqrt{52}} = \sqrt{\frac{4560}{52}}$$

$$\approx 9,3644$$

(b) Gemäß Übung 6.4 schneiden sich die Geraden in genau einem Punkt.

Es folgt: $d(g,h)=0$

(c) Gemäß Übung 6.4 sind die Geraden g und h windschief.

Wir berechnen das Vektorprodukt ihrer Richtungsvektoren:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; der von den Stützpunkten definierte Vektor ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}$.

$$d(g,h) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{14}} = \frac{24}{\sqrt{14}} \approx 6,4143$$

(d) Gemäß Übung 6.4 sind die Geraden g und h identisch; also gilt $d(g,h)=0$.

(e) Gemäß Übung 6.4 schneiden sich die Geraden g und h in genau einem Punkt. Also gilt auch hier $d(g,h)=0$.

Übung 19.4

(a) Für $t=-5$ schneiden sich g_t und h in einem Punkt; das heißt $d(g_{-5},h)=0$.

Für $t=10$ sind g_t und h parallel, also gilt

$$d(g_{10},h) = \frac{\sqrt{\begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 10-7 \\ 1-2 \\ -5+1 \end{pmatrix}^2 - \left(\begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}\right)^2}}{\sqrt{\begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}^2}} = \frac{\sqrt{504 \cdot 26 - 42^2}}{\sqrt{504}} = \sqrt{\frac{11340}{504}} = \sqrt{\frac{45}{2}}$$

$$\approx 4,7434$$

Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 10\}$ sind g_t und h windschief.

$\begin{pmatrix} -15 \\ t \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t-60 \\ 0 \\ -18t+180 \end{pmatrix}$; $-\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-7 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$d(g_t, h) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 6t-60 \\ 0 \\ -18t+180 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t-7 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(6t-60)^2 + 0^2 + (-18t+180)^2}}$$

$$= \frac{|6t^2 - 30t - 300|}{\sqrt{360t^2 - 7200t + 36000}}$$

$$= \frac{6\,|t^2 - 5t - 50|}{6 \cdot \sqrt{10t^2 - 200t + 1000}} = \frac{|(t+5)(t-10)|}{\sqrt{10\,(t-10)^2}}$$

$$= \frac{|t+5|\,|t-10|}{\sqrt{10} \cdot |t-10|} \underset{t \neq 10}{=} \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot |t+5|$$

Es ist geschickter, den Term $(t-10)$ nicht aufzugeben!

Die Abstandsformel ist für $t=-5$ definiert und liefert für diesen Parameterwert den Abstand 0. Das passt zur Tatsache, dass g_{-5} und h sich in einem Punkt schneiden.

Die Abstandsformel ist für $t=10$ zunächst nicht definiert, weil der Nenner für diesen Parameterwert, der parallele Geraden erzeugt, verschwindet.

Die letzte Umformung zeigt, dass es sich bei der Definitionslücke 10 um eine hebbare Singularität handelt.

Die stetige Ergänzung hat den Wert $d(g_{10}, h) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 15 = \sqrt{\frac{45}{2}}$

Das passt zu dem Wert, der anfangs dieser Lösung über die Abstandsformel für parallele Geraden ermittelt wurde.

Die Lösung der Aufgabe bestätigt die Passung der diversen Abstandskonzepte, die im Paragraph § 19 entwickelt wurden.

(b) wie (a); der Term $2t^2-8$ sollte in der Rechnung nirgendwo aufgegeben werden, sobald er über das Vektorprodukt der Richtungsvektoren ermittelt worden ist.