



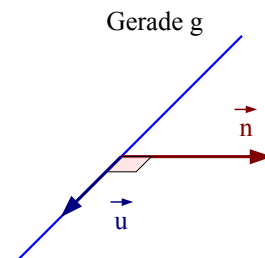
§18 Normalen und Lotebenen von Geraden

Im Folgenden wird untersucht, inwieweit die im Paragraphen §15 für Ebenen vorgenommenen Begriffsbildungen und gewonnenen Erkenntnisse auf Geraden übertragbar sind.

(18.1) Definition

Gegeben sei eine Gerade im Modellraum.

Ein Vektor \vec{n} heißt *Normalenvektor der Geraden*, wenn \vec{n} orthogonal zu **allen** Richtungsvektoren der Geraden ist.



Sicherheitshalber sei angemerkt, dass der Nullvektor diese Bedingung erfüllt; er ist also immer ein Normalenvektor jeder Geraden. Wenn der Nullvektor ausgeschlossen sein soll, muss das stets ausdrücklich erwähnt werden.

Wie bei Ebenen simplifizieren wir das Kriterium:

(18.2) Hinreichendes Kriterium

Sei g eine Gerade im Modellraum und \vec{u} ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor von g .

Ein Vektor \vec{n} ist genau dann ein Normalenvektor von g , wenn \vec{n} orthogonal zu \vec{u} ist.

Beweis:

„ \Rightarrow “: trivial

„ \Leftarrow “:

Gelte also $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.

Sei nun \vec{w} irgendein Richtungsvektor der Geraden g . Dann gibt es einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{w} = \lambda \vec{u}$.

Damit folgt: $\vec{n} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot (\lambda \vec{u}) = \lambda (\vec{n} \cdot \vec{u}) = 0$.

In Anlehnung an Definition (15.7) erklären wir

(18.3) Definition

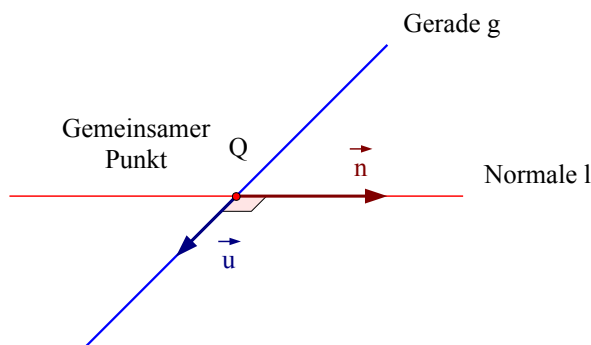
Gegeben sei eine Gerade g sowie eine Gerade l .

Wir sagen: „Die Gerade l steht senkrecht auf der Geraden g “

oder: „Die Gerade l ist eine Normale der Geraden g “

oder: „Die Gerade l ist ein Lot zur Gerade g “

und schreiben „ $l \perp g$ “, falls die Gerade l die Gerade g in genau einem Punkt schneidet und jeder Richtungsvektor der Geraden l orthogonal zu jedem Richtungsvektor der Geraden g ist.



Offensichtlich ist die Definition trotz ihrer einseitigen Formulierung symmetrisch. Wenn $l \perp g$ gilt, gilt auch $g \perp l$.

Beachte, dass sich - anders als bei Ebenen - aus der Orthogonalitätsbedingung für die Richtungsvektoren nicht automatisch ein Schnittpunkt ergibt. Zwei Geraden mit orthogonalen Richtungsvektoren sind in der Regel windschief!



Wie bei Ebenen kann aber die Bedingung dafür, dass zwei Geraden senkrecht aufeinander stehen, aufgrund des hinreichenden Kriteriums (18.2) stark vereinfacht werden:

(18.4) Bemerkung

Sei $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ eine Gerade.

Dann steht die Gerade $l: \vec{X} = \vec{Q} + \rho \vec{n}$ genau dann senkrecht auf der Geraden g , wenn die Gerade l die Gerade g in genau einem Punkt schneidet und ihre Richtungsvektoren \vec{n} und \vec{u} orthogonal sind.

Beweis:

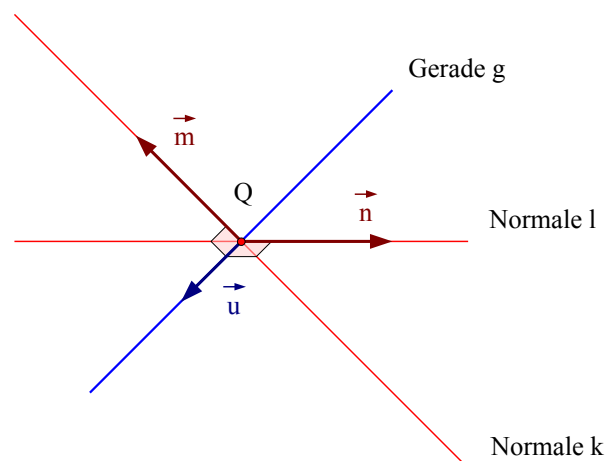
„ \Rightarrow “: trivial

„ \Leftarrow “:

Gelte also $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$. Dem Kriterium (18.2) zufolge ist der Vektor \vec{n} ein Normalenvektor der Geraden g und der Vektor \vec{u} ein Normalenvektor der Geraden l .

Wir dürfen auch sagen: „Zwei Geraden stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn sie sich in genau einem Punkt schneiden und jeweils ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor der einen Geraden ein Normalenvektor der anderen Geraden ist.“

Die Konstruktion von Normalen zu einer gegebenen Geraden g verläuft theoretisch weniger glatt, als die Konstruktion von Normalen einer Ebene. Liegt nämlich der Punkt Q , durch den die Normale verlaufen soll, auf der Geraden g , so ist die Auswahl bezüglich des Normalenvektors groß, wie das folgende Schaubild zeigt.



Zwecks Analyse des Sachverhalts werden im folgenden Satz zwei wichtige Erkenntnisse über Vektoren zusammengefasst, die bei Ebenen angewandt wurden, um aus Normalengleichungen Punktgleichungen zu rekonstruieren:

(18.5) Satz

Sei \vec{u} ein vom Nullvektor verschiedener Vektor. Dann gilt:

- (1) Es gibt stets zwei linear unabhängige Vektoren \vec{n} und \vec{m} , die orthogonal zu \vec{u} sind (und daher zusammen mit \vec{u} eine Basis des Modellraumes \mathbb{R}^3 bilden).
- (2) Sind \vec{n} und \vec{m} zwei linear unabhängige, zu \vec{u} orthogonale Vektoren, so ist ein weiterer Vektor \vec{w} genau dann orthogonal zu \vec{u} , wenn er eine Linearkombination von \vec{n} und \vec{m} ist.

Beweis:

zu (1): siehe Satz (16.6)

zu (2): siehe 2. Orthogonalitätstheorem (15.6)

Aus diesen Erkenntnissen ergibt sich direkt:

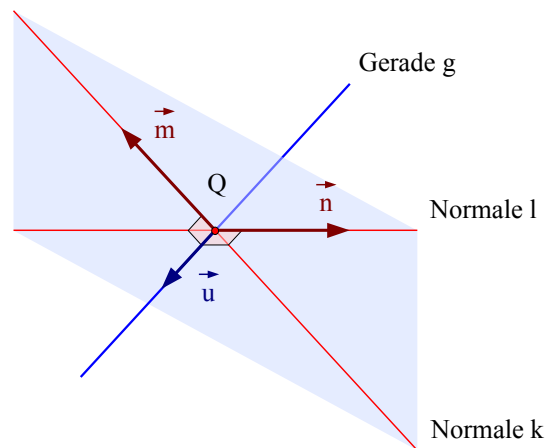
(18.6) Korollar

Sei g eine Gerade und Q ein Punkt von g .

Dann gibt es unendlich viele Normalen von g , die durch Q verlaufen.

Liegt der Raumpunkt Q nicht auf der Geraden g , ist diese Vielfalt vermutlich nicht gegeben. Wir werden diesen Gedanken weiter unten wieder aufgreifen.

Zunächst einmal sagt uns unsere Anschauung, dass alle Normalen einer Geraden, die durch einen ihrer Punkte laufen, in einer Ebene liegen, auf der die Gerade senkrecht steht.



Der folgende Satz gibt diese Anschauung wieder.

(18.7) Satz

Sei $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ eine Gerade und Q ein Punkt von g .

Dann steht die Gerade g senkrecht auf der Ebene $e : \vec{u} \cdot \vec{X} - \vec{u} \cdot \vec{Q} = 0$.

Die Ebene e enthält neben dem Punkt Q alle Normalen von g , die durch Q verlaufen.

Beweis:

Weil e den Richtungsvektor \vec{u} der Geraden als Normalenvektor besitzt, gilt $g \perp e$.

Offenbar besitzt e gemäß Konstruktion ihrer Punktnormalengleichung den Stützpunkt Q .

Ist nun l irgendeine Normale der Geraden g , die durch Q verläuft, besitzt diese einen Richtungsvektor \vec{n} , der orthogonal zu \vec{u} ist. Aufgrund des 1. Normalenvektorsatzes (15.12) muss \vec{n} ein Richtungsvektor von e sein.

Die Normale l verläuft also durch einen Punkt von e , nämlich Q , und besitzt einen Richtungsvektor, der ein Richtungsvektor der Ebene e ist. Also liegt l gemäß Satz (17.1) ganz in der Ebene e .

Im Satz (18.7) wird die Ebene e durch zwei Bedingungen eindeutig charakterisiert:

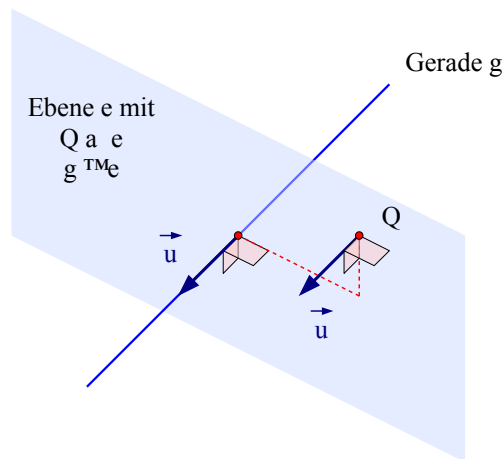
- Die Ebene e besitzt die Gerade g als Normale.
- Die Ebene verläuft durch den Punkt Q .

Wir zeigen, dass diese beiden Bedingungen immer genau eine Ebene e festlegen, und zwar unabhängig davon, ob der Punkt Q zur Gerade g gehört:

(18.8) Satz

Sei $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ eine Gerade und Q ein Punkt des Modellraumes.

Dann ist die Ebene $e : \vec{u} \cdot \vec{X} - \vec{u} \cdot \vec{Q} = 0$, die einzige Ebene, die die Gerade g als Normale besitzt und durch den Punkt Q verläuft.



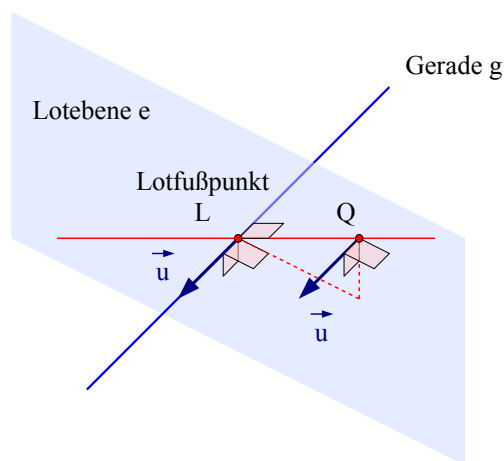
Beweis:

Gemäß Konstruktion ihrer Punktnormalengleichung erfüllt die Ebene $e: \vec{u} \cdot \vec{X} - \vec{u} \cdot \vec{Q} = 0$ beide Bedingungen. Sei f eine zweite Ebene, die ebenfalls die gewünschten Eigenschaften besitzt. Weil g auf ihr senkrecht stehen soll, ist \vec{u} ein Normalenvektor von f . Daraus ergibt sich bereits nach Satz (17.5), dass die Ebenen e und f parallel oder identisch sein müssen. Da beide Ebenen den Punkt Q enthalten sollen, müssen sie identisch sein.

Der Satz (18.8) erlaubt uns, einen neuen Begriff einzuführen.

(18.9) Definition

Ist $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ eine Gerade und Q ein Punkt des Modellraumes, so heiÙe die durch die Punktnormalengleichung $e: \vec{u} \cdot \vec{X} - \vec{u} \cdot \vec{Q} = 0$ definierte Ebene *Lotebene zur Geraden g durch den Punkt Q* .



Die so definierte Lotebene zur Geraden g durch den Punkt Q ist gemäß Satz (18.8) durch g und Q eindeutig festgelegt. Da die Gerade g senkrecht auf der Lotebene steht, haben die beiden Objekte genau einen gemeinsamen Punkt. Dieser eindeutig bestimmte Punkt ist ausschließlich abhängig von der Geraden g und dem Punkt Q .

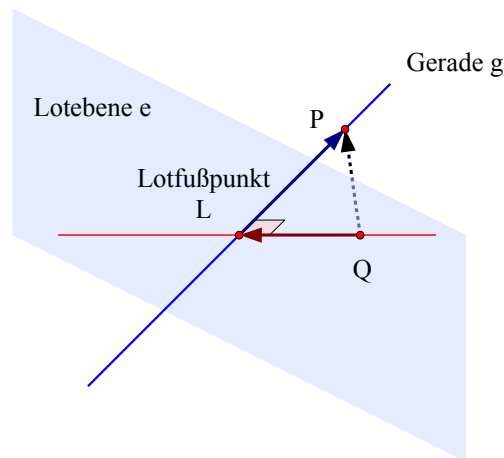
(18.10) Definition

Sei g eine Gerade und Q ein Punkt des Modellraumes.

Ist e die Lotebene zur Geraden g durch den Punkt Q und L ihr Schnittpunkt mit der Geraden g , so heiÙe L *Lotfußpunkt von Q auf der Geraden g* .



Es ist anschaulich klar, dass der Lotfußpunkt eines Punktes Q auf einer Geraden derjenige Geradenpunkt sein muss, der den kleinsten Abstand zum Punkt Q aufweist.



(18.11) Satz

Sei g eine Gerade, Q ein Punkt des Modellraumes und L der Lotfußpunkt von Q auf g .
Dann gilt für jeden von Q verschiedenen Punkt P der Geraden g : $d(Q, P) > d(Q, L)$.

Beweis:

Weil P und L Punkte der Geraden g sind, ist \vec{LP} ein Richtungsvektor von g .

Als solcher ist \vec{LP} ein Normalenvektor der Lotebene e , weil g eine Normale von e ist.

Weil Q und L Punkte der Lotebene e sind, ist \vec{QL} ein Richtungsvektor von e .

Aus den bisherigen Überlegungen folgt: $\vec{LP} \cdot \vec{QL} = 0$

Daraus ergibt sich

$$d(Q, P)^2 = \vec{QP}^2 = (\vec{QL} + \vec{LP})^2 = \vec{QL}^2 + 2 \vec{QL} \cdot \vec{LP} + \vec{LP}^2$$

Wegen der Orthogonalität von \vec{QL} und \vec{LP} verschwindet der mittlere Summand; es folgt

$$d(Q, P)^2 = \vec{QL}^2 + \vec{LP}^2 = d(Q, L)^2 + d(L, P)^2 > d(Q, L)^2 \text{ und damit } d(Q, P) > d(Q, L).$$

Die Behauptung des Satzes ergibt sich nun durch schlichtes Wurzelziehen.

Der aufmerksame Leser wird erkannt haben, dass die Beweisführung zum Satz (18.11) völlig analog zum Beweis des Satzes (15.22) erfolgt.

Der Satz (18.11) legitimiert die Einführung eines weiteren Abstandsbegriffs:

(18.12) Definition

Sei g eine Gerade, Q ein Punkt des Modellraumes und L der Lotfußpunkt von Q auf g .

Dann heie die Zahl $d(Q, g) := d(Q, L) = \|\vec{QL}\| = \|\vec{LQ}\|$ Abstand vom Punkt Q zur Geraden g .

Aus der Definition geht hervor, dass der Abstand eines Punktes von einer Geraden genau dann den Wert 0 hat, wenn der Punkt mit seinem Lotfußpunkt übereinstimmt. Das ist genau dann der Fall, wenn Q ein Punkt der Geraden ist:

(18.13) Bemerkung

Ist g eine Gerade und Q ein Punkt des Modellraumes, so gilt $d(Q, g) = 0 \Leftrightarrow Q \in g$

Für den Abstand eines Punktes von einer Geraden kann durch allgemeine Rechnung eine Formel abgeleitet werden. Diese enthält – wie die Hessesche Abstandformel – den Lotfußpunkt nicht!



(18.14) Abstandsformel

Sei $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ eine Gerade, Q ein Punkt des Modellraumes. Dann gilt:

$$d(Q, g) = \frac{\sqrt{\vec{u}^2 (\vec{A}\vec{Q})^2 - (\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q})^2}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{A}\vec{Q}\|^2 - |\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q}|^2}}{\|\vec{u}\|}$$

Beweis:

Die Lotebene von Q auf g besitzt die Gleichung $e : \vec{u} \cdot \vec{X} - \vec{u} \cdot \vec{Q} = 0$.

Da der Lotfußpunkt L von Q auf g sowohl die Gleichung von g als auch die Gleichung von e erfüllen muss, finden wir seinen Parameterwert λ durch die Gleichung

$$\vec{u} \cdot (\vec{A} + \lambda \vec{u}) - \vec{u} \cdot \vec{Q} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{A} + \lambda \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{Q} = 0 \Leftrightarrow \lambda \vec{u}^2 = -\vec{u} \cdot \vec{A} + \vec{u} \cdot \vec{Q} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q}}{\vec{u}^2}$$

Der Lotfußpunkt L ist also gegeben durch $\vec{L} = \vec{A} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q}}{\vec{u}^2} \vec{u}$.

Es folgt $\vec{L}\vec{Q} = -\vec{A} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q}}{\vec{u}^2} \vec{u} + \vec{Q} = \vec{A}\vec{Q} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q}}{\vec{u}^2} \vec{u}$, daraus

$$\begin{aligned} d(Q, g)^2 &= \|\vec{L}\vec{Q}\|^2 = (\vec{L}\vec{Q})^2 = \left(\vec{A}\vec{Q} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q}}{\vec{u}^2} \vec{u}\right)^2 = (\vec{A}\vec{Q})^2 - 2 \frac{\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q}}{\vec{u}^2} (\vec{A}\vec{Q} \cdot \vec{u}) + \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q}}{\vec{u}^2} \vec{u}\right)^2 \\ &= (\vec{A}\vec{Q})^2 - 2 \frac{(\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q})^2}{\vec{u}^2} + \frac{(\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q})^2}{\vec{u}^4} \vec{u}^2 = (\vec{A}\vec{Q})^2 - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q})^2}{\vec{u}^2} = \frac{(\vec{A}\vec{Q})^2 \vec{u}^2 - (\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q})^2}{\vec{u}^2} \end{aligned}$$

und schließlich $d(Q, g) = \frac{\sqrt{\vec{u}^2 (\vec{A}\vec{Q})^2 - (\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q})^2}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{A}\vec{Q}\|^2 - |\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q}|^2}}{\|\vec{u}\|}$

Obwohl der Radikand im Zähler der Abstandsformel prinzipiell nicht negativ sein kann, weil er das Vorzeichen des Quadrats $d(Q, g)^2$ haben muss, werden wir hier an die Cauchy-Schwartzsche Ungleichung (14.15) erinnert, die die Ungleichung

$$|\vec{u} \cdot \vec{A}\vec{Q}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{A}\vec{Q}\|$$

gewährleistet. Ihre Gültigkeit wird an dieser Stelle noch einmal sichtbar.

Die Abstandsformel (18.14) wird in einem der folgenden Paragraphen eine wichtige Rolle spielen. Es wird sich also zeigen, dass sich die gedankliche Anstrengung zu ihrer Herleitung lohnt!

Wir kommen nun auf unsere Anmerkung zu Korollar (18.6) zurück. Im Korollar selbst wurde festgehalten, dass es zu jedem Punkt auf einer Gerade unendlich viele Normalen der Geraden gibt, die durch diesen Geradenpunkt verlaufen.

In der besagten Anmerkung zu diesem Korollar hatten wir die Vermutung geäußert, dass es sich anders verhält, wenn der Punkt nicht auf, sondern außerhalb der Geraden liegt.

(18.15) Satz

Sei $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ eine Gerade und Q ein Punkt des Modellraumes, der **nicht** zu g gehört.

Dann ist die Gerade QL, die durch den Punkt Q und seinen Lotfußpunkt L definiert ist, die einzige Normale von g, die durch den Punkt Q verläuft.

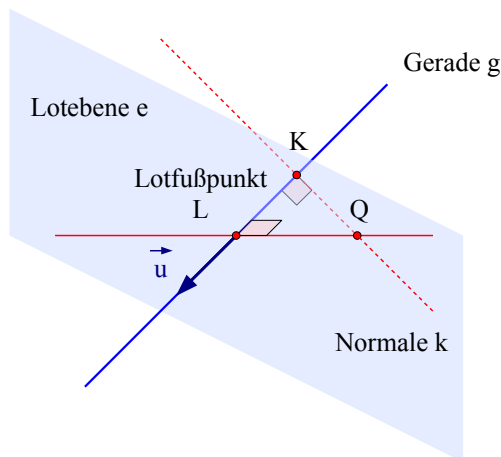
Beweis:

Weil der Punkt Q außerhalb von g, sein Lotfußpunkt L aber auf g liegt, definieren die Punkte Q und L eine Gerade QL. Der Vektor $\vec{Q}\vec{L}$ ist ein Richtungsvektor dieser Geraden QL.

Sei e die Lotebene von Q auf g. Weil beide Punkte Q und L in e liegen, ist der Vektor $\vec{Q}\vec{L}$ auch ein Richtungsvektor von e.

Weil der Richtungsvektor \vec{u} der Geraden g ein Normalenvektor der Lotebene e ist, sind die Vektoren $\vec{Q}\vec{L}$ und \vec{u} orthogonal. Also ist die Gerade QL, die trivialerweise durch Q verläuft, eine Normale von g.

Es ist also nur noch zu zeigen, dass QL die einzige Normale von g mit dieser Eigenschaft ist.



Nehmen wir also an, es gäbe noch eine weitere, von QL verschiedene Normale k von g , die durch Q verläuft. Da k und QL den gemeinsamen Punkt Q besitzen, müsste die Normale k die Gerade g in einem von L verschiedenen Punkt K schneiden, der nicht auf QL liegen kann. Andernfalls würde der Identitätssatz für Geraden (5.8) sofort $k = QL$ liefern.

Der Vektor \vec{LK} wäre ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor der Geraden g . Es gäbe also einen Skalar $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\vec{LK} = \mu \vec{u}$

Nun gilt offensichtlich $\vec{QL} + \vec{LK} + \vec{KQ} = \vec{0}$.

Weil QL und k Normalen der Geraden g sind, gilt $\vec{u} \cdot \vec{QL} = 0$ und $\vec{u} \cdot \vec{KQ} = 0$. Daraus folgt:

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{u} \cdot (\vec{QL} + \vec{LK} + \vec{KQ}) = 0 + \vec{u} \cdot (\mu \vec{u}) + 0 = \mu \vec{u}^2$$

Da $\mu \neq 0$ gelten soll, müsste \vec{u} der Nullvektor sein. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Die Annahme, es gäbe neben der Geraden QL noch eine weitere Normale von g , die durch Q verläuft, ist falsch.

Im 1. Normalenvektorsatz für Ebenen (15.12) wurde die Erkenntnis festgehalten, dass ein Vektor \vec{w} genau dann ein Richtungsvektor einer Ebene ist, wenn er orthogonal zu einem Normalenvektor der Ebene ist. Dieser Sachverhalt begründet letztlich die Beschreibung von Ebenen durch Normalengleichungen.

Die beiden Normalenvektorsätze für Ebenen (15.12) und (15.13) gelten für Geraden nicht! Beispielsweise ist ein Vektor, der orthogonal zu einem Normalenvektor einer Geraden ist, nicht notwendig ein Richtungsvektor der Geraden, wie das folgende Beispiel zeigt.

(18.16) Gegenbeispiel

Die Gerade $g : \vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzt den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn offenbar ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist zwar wegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ orthogonal zum Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, trotzdem aber kein Richtungsvektor, sondern ebenfalls ein Normalenvektor von g .

Damit sollte klar sein, weshalb für Geraden des dreidimensionalen Modellraumes \mathbb{R}^3 der Versuch sinnlos ist, sie mit einer Normalengleichung beschreiben zu wollen. Das ist allenfalls im \mathbb{R}^2 möglich!