Übungen zu §18

Übung 18.1

Gib für die Gerade g die Gleichungen von drei verschiedenen Normalen an, die durch ihren Stützpunkt verlaufen.
Gib außerdem die Normalengleichung der Lotebene zur Geraden g an, die durch ihren Stützpunkt verläuft.

(a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ (b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (c) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$

Übung 18.2

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\, \vec{u}$ und der Punkt Q.

- Zeige, dass der Punkt Q nicht auf g liegt.
- Notiere die Gleichung der Lotebene e zu g durch Q.
- Ermittle die Koordinaten des Lotfußpunktes L von Q auf g.
- Gib die Gleichung der Normalen LQ an.
- Berechne den Abstand d(Q, g).

(a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Q = (–7; 7; –1) (b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ Q = (5; –6; 8)

Übung (18.3)

Gegeben sind die drei nicht kollinearen Punkten A = (2; 4; –8), B = (5; –4; 7), C = (–2; –1; 3).
Berechne mit Hilfe der Abstandsformel (18.14) die Abstände, die die Eckpunkte von den ihnen gegenüber liegenden Seiten haben.

Übung 18.4

Gegeben sind die drei nicht kollinearen Punkten A = (22; 45; –8), B = (52; –45; 37), C = (–28; –15; –13).
In jedem Dreieck $\langle ABC \rangle$ sind die drei Höhengeraden h_A, h_B, h_C als die Lote von den Eckpunkten A, B, C auf die gegenüber liegenden Seitengeraden BC, AC, AB erklärt. Die Lotfußpunkte werden in passender Weise als Höhenfußpunkte bezeichnet.

(a) Ermittle die Koordinaten der drei Höhenfußpunkte H_A, H_B, H_C.
(b) Ermittle Punktrichtungsgleichungen für die drei Höhengeraden h_A, h_B, h_C.
(c) Zeige, dass sich die drei Höhengeraden in genau einem Punkt H, dem so genannten „Höhenschnittpunkt“ schneiden, und gib dessen Koordinaten an.

Übung 18.5

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und für $t \in \mathbb{R}$ die Gerade $l_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ -2 \end{pmatrix}$.

- Bestimme den Parameter t so, dass die Gerade l_t eine Normale der Geraden g ist.
- In welchem Punkt schneidet die Normale l_t die Gerade g?

Übung 18.6

Gegeben seien die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, auf ihr der Punkt P_λ durch $\vec{P}_\lambda := \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie der Punkt Q = (–15; 8; 6).

Stelle den Abstand d zwischen den Punkten Q und P_λ als Funktion mit der Variablen $\lambda \in \mathbb{R}$ dar. Ermittle den Wert λ, für den die Funktion d ihr Minimum annimmt. Zeige, dass der zugehörige Punkt P_λ der Lotfußpunkt von Q auf g ist.