Übung 18.1

(a) $\ell_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix}$; $\ell_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix}$; $\ell_3: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}8\\7\\7\end{pmatrix}$

Lotebene: $e: \begin{pmatrix}-7\\3\\5\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - \begin{pmatrix}-7\\3\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-7\\3\\5\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - 19 = 0$

(b) $\ell_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$; $\ell_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\1\\0\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\ell_3: \vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\1\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$

Lotebene: $e: \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - 6 = 0$

(c) Im $\mathbb{R}^2$ existiert nur eine Normale zu einer Gerade, die durch einen vorgegebenen Punkt verlaufen soll:

$\ell: \vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$ $\qquad \ell: \begin{pmatrix}3\\-8\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\-8\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + 31 = 0$

Übung 18.2

(a) $Q \in g \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix}-7\\7\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\4\\5\end{pmatrix}$ [nicht lösbar]

$e: \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\7\\-1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + 19 = 0$

$\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}\right] + 19 = 0 \Leftrightarrow 23 + 21\lambda + 19 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$

Lotfußpunkt: $\vec{L} = \begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\1\\-2\end{pmatrix}$

Normale LQ: $\vec{x} = \vec{L} + \mu\,\vec{LQ} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\1\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\6\\1\end{pmatrix}$

$d(Q,g) = d(Q,L) = \|\vec{LQ}\| = \sqrt{38}$

(b) $Q \in g \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix}5\\-6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\-7\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-9\\15\end{pmatrix}$ [nicht lösbar]

$$e: \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5\\-6\\8\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \vec{x} - 36 = 0$$

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}5\\3\\-7\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \right] - 36 = 0 \Leftrightarrow -6 + 14\lambda - 36 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

Lotfußpunkt $\vec{L} = \begin{pmatrix}5\\3\\-7\end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\-6\\-4\end{pmatrix}$

Normale LQ : $\vec{x} = \begin{pmatrix}11\\-6\\-4\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-6\\0\\12\end{pmatrix}$; $d(Q,g) = \|\vec{LQ}\| = \sqrt{180}$

<u>Übung 18.3</u> $g: \vec{x} = \vec{P} + \lambda \vec{u}$; $d(Q,g) = \dfrac{\sqrt{\vec{u}^2 (\vec{Q})^2 - (\vec{u} \cdot \vec{Q})^2}}{\|\vec{u}\|}$

$AB: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\-8\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\-8\\15\end{pmatrix}$; $BC: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\-4\\7\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-7\\3\\-4\end{pmatrix}$; $CA: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}4\\5\\-11\end{pmatrix}$

$$d(C, AB) = \frac{\sqrt{298 \cdot 162 - 37249}}{\sqrt{298}} = \sqrt{\frac{11027}{298}} \approx 6{,}0830$$

$$d(A, BC) = \frac{\sqrt{74 \cdot 298 - 11025}}{\sqrt{74}} = \sqrt{\frac{11027}{74}} \approx 12{,}2071$$

$$d(B, CA) = \frac{162 \cdot 74 - 961}{\sqrt{162}} = \sqrt{\frac{11027}{162}} \approx 8{,}2503$$

<u>Übung 18.4</u>

$AB: \vec{x} = \begin{pmatrix}22\\45\\-8\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}30\\-90\\45\end{pmatrix}$; $BC: \vec{x} = \begin{pmatrix}52\\-45\\37\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-80\\30\\-50\end{pmatrix}$; $CA: \vec{x} = \begin{pmatrix}-28\\-15\\-13\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}50\\60\\5\end{pmatrix}$

Lotebene zu AB durch C: $e_c: \begin{pmatrix}30\\-90\\45\end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix}30\\-90\\45\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-28\\-15\\-13\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}30\\-90\\45\end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 75 = 0$

$$\begin{pmatrix}30\\-90\\45\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}22\\45\\-8\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}30\\-90\\45\end{pmatrix} \right] + 75 = 0 \Leftrightarrow -3750 + 11025\lambda + 75 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

$$\vec{H_c} = \begin{pmatrix}22\\45\\-8\end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix}30\\-90\\45\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\15\\7\end{pmatrix}$$

$$h_c: \vec{x} = \begin{pmatrix} -28 \\ -15 \\ -13 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Lotebene zu BC durch A: $e_A: \begin{pmatrix} -80 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} -80 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 45 \\ -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -80 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 10 = 0$

$$\begin{pmatrix} -80 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 52 \\ -45 \\ 37 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -80 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix} \right] + 10 = 0 \Leftrightarrow -7360 + 9800\mu + 10 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{4}$$

$$\vec{H_A} = \begin{pmatrix} 52 \\ -45 \\ 37 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -80 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -45/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \; ; \; h_A: \vec{x} = \begin{pmatrix} 22 \\ 45 \\ -8 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -30 \\ -135/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

Lotebene zu CA durch B: $e_B: \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 52 \\ -45 \\ 37 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 85 = 0$

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -28 \\ -15 \\ -13 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 5 \end{pmatrix} \right] - 85 = 0 \Leftrightarrow -2365 + 6125\nu - 85 = 0 \Leftrightarrow \nu = \frac{2}{5}$$

$$\vec{H_B} = \begin{pmatrix} -28 \\ -15 \\ -13 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix} \; ; \; h_B: \vec{x} = \begin{pmatrix} 52 \\ -45 \\ 37 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -60 \\ 54 \\ -48 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren von h_B und h_C sind linear unabhängig. h_B und h_C sind windschief oder schneiden sich in einem Punkt H.

Verkürzter Schnittpunktansatz:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad -60\beta - 60\gamma = -80 \\
&(2) \quad 54\beta - 30\gamma = 30 \Leftrightarrow -108\beta + 60\gamma = -60 \\
&[(3) \quad -48\beta - 20\gamma = -50]
\end{aligned}$$

$(1)+(2)$: $-168\beta = -140 \Leftrightarrow \beta = \frac{5}{6} \quad (4)$

$(4) \to (1)$: $-50 - 60\gamma = -80 \Leftrightarrow -60\gamma = -30 \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{2} \quad (5)$

$(4),(5) \to (3)$: $-48 \cdot \frac{5}{6} - 20 \cdot \frac{1}{2} = -50 \Leftrightarrow -40 - 10 = -50$ [wahr]

h_B und h_C schneiden sich im Punkt H mit $\vec{H} = \begin{pmatrix} -28 \\ -15 \\ -13 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$H \in h_A \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 45 \\ -8 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -30 \\ -135/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} -60 \\ -135 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -45 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

Alle drei Höhengeraden h_A, h_B und h_C schneiden sich in $H = (2; 0; -3)$.

Übung 18.5

$$\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-t\\2t\\-2\end{pmatrix}=0 \iff -2t-4t-6=0 \iff -6t=6 \iff t=-1$$

Für $t=-1$ sind die Richtungsvektoren von g und l_t orthogonal und damit auch linear unabhängig. $l_{-1}: \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\5\\8\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$

Verkürzter Schnittpunktansatz:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad 2\lambda-\mu=3\\
&(2)\quad -2\lambda+2\mu=0\\
&[(3)\quad 3\lambda+2\mu=15\,]
\end{aligned}$$

$(1)+(2):\quad \mu=3 \quad (4)$

$(4)\rightarrow(1):\quad 2\lambda-3=3 \iff 2\lambda=6 \iff \lambda=3 \quad (5)$

$(4),(5)\rightarrow(3):\quad 3\cdot3+2\cdot3=15 \quad [\text{wahr}]$

g und l_{-1} schneiden sich im Punkt S mit $\vec{s}=\begin{pmatrix}2\\5\\-7\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Übung 18.6

$$d(\lambda):=d(Q,P_\lambda)=\|\overrightarrow{QP_\lambda}\|=\left\|\begin{pmatrix}22\\-7\\-11\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{19\lambda^2+152\lambda+654}\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Da die Wurzelfunktion streng monoton steigend ist, nimmt die Funktion $d(\lambda)$ ihr Minimum dort an, wo die Radikandenfunktion $r(\lambda):=19\lambda^2+152\lambda+654$ ihr Minimum annimmt. r ist eine quadratische Funktion mit positivem Leitkoeffizienten; daher wird r an der Scheitelstelle minimal.

$$2\cdot19\lambda+152=0 \iff \lambda=-4; \qquad \vec{P}_{-4}=\begin{pmatrix}7\\1\\-5\end{pmatrix}+(-4)\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\13\\-9\end{pmatrix}$$

Lotebene zu g durch Q: $e: \begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-15\\8\\6\end{pmatrix}=0 \iff \begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}+63=0$

$$\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}7\\1\\-5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}\right]+63=0 \iff 13+19\lambda+63=0 \iff 19\lambda=-76 \iff \lambda=-4$$

Der Lotfußpunkt von Q auf g stimmt mit P_{-4} überein!