

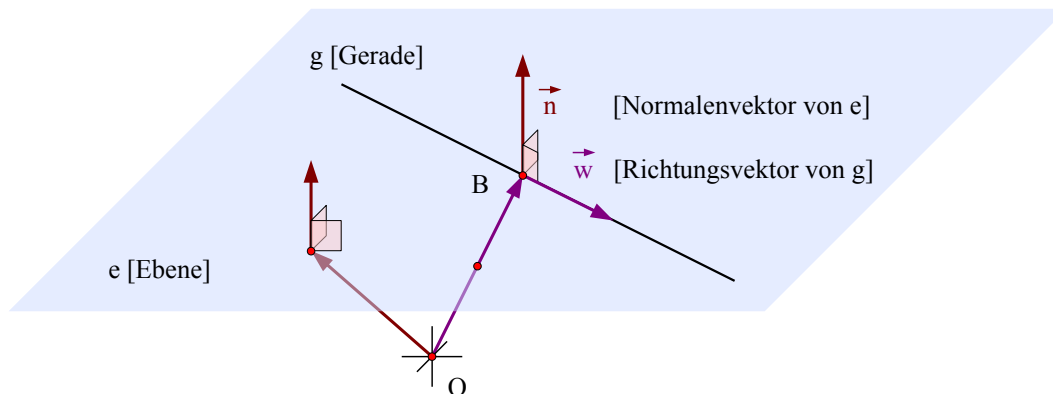


## §17 Lagebeziehungsanalyse mit Normalengleichungen

In diesem Paragraphen wird eindrucksvoll dargestellt, wie Normalengleichungen die Untersuchung der Lagebeziehung zwischen einer Gerade und einer Ebene sowie die Untersuchung der Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen vereinfachen.

Auf die Lagebeziehung zwischen zwei Geraden wird nicht noch einmal eingegangen, weil sich bei der Beschreibung von Geraden nichts geändert hat. Wie mit Hilfe ihrer Punktrichtungsgleichungen die Lagebeziehung zweier Geraden untersucht werden kann, wurde in §6 umfassend dargelegt.

### Abschnitt 1: Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene



#### (17.1) Satz

Sei  $e : \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$  eine Ebene und  $g : \vec{X} = \vec{B} + \rho \vec{w}$  eine Gerade.

Die Gerade  $g$  verläuft genau dann parallel zur Ebene  $e$  oder in der Ebene  $e$ , falls ihr Richtungsvektor  $\vec{w}$  orthogonal zum Normalenvektor der Ebene  $\vec{n}$  ist.

Beweis:

Seien  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  zwei linear unabhängige Richtungsvektoren von  $e$ .

Dann folgt der Reihe nach:

- $g \parallel e \vee g \subset e$
- $\Leftrightarrow \vec{w}$  ist Linearkombination von  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ . [Analyse-Raster (11.5)]
- $\Leftrightarrow \vec{w}$  ist orthogonal zu  $\vec{n}$ . [1. Normalenvektorsatz (15.12)]

Der Satz (17.1) zeigt, dass kein Gleichungssystem mehr untersucht werden muss, um herauszufinden, ob eine Gerade eine Ebene schneidet, wenn die Ebene durch eine Normalengleichung dargestellt ist.

Aus dem Satz folgt weiterhin, dass eine Gerade eine Ebene in genau einem Punkt schneiden („durchstoßen“) muss, wenn der Richtungsvektor der Geraden nicht orthogonal zum Normalenvektor der Ebene ist. Die Schnittpunktbestimmung reduziert sich auf die Lösung einer einzigen linearen Gleichung, wie das folgende Beispiel zeigt.

#### (17.2) Beispiel (Schnittpunktberechnung)

Sei die Ebene  $e$  gegeben durch  $e : \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} - 12 = 0$  und die Gerade  $g$  durch  $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Wegen  $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 + 4 + 9 = 15 \neq 0$  ist der Richtungsvektor der Geraden  $g$  nicht orthogonal zum Normalenvektor der Ebene  $e$ ; also schneiden sich  $g$  und  $e$  gemäß Satz (17.1) in genau einem Punkt  $S$ .



Der Ortsvektor von S muss sowohl die Ebenen- als auch die Geradengleichung erfüllen; indem wir den Term der Geradengleichung in die Normalengleichung der Ebene einsetzen, erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] - 12 = 0$$

Mit den Rechenregeln für das Skalarprodukt erhalten wir eine lineare Gleichung, die sich leicht lösen lässt:

$$(-2 - 4 - 12) + \rho \cdot (2 + 4 + 9) - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -18 + 15 \rho - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 15 \rho = 30 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 2$$

Es folgt:  $\vec{S} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Das Einsetzen des Punktterms der Geradengleichung in die Normalengleichung der Ebene ist keine äquivalente Umformung des (nicht notierten) Gleichungssystems aus Geraden- und Ebenengleichung, welches die Schnittmenge aus Gerade und Ebene beschreibt. Trotzdem erübrigt sich am Ende der Rechnung eine Probe, weil die lineare Gleichung für den Geradenparameter  $\rho$  nur eine Lösung abwirft und vorab die Existenz einer Lösung sichergestellt wird.

Diese Argumentation verdeutlicht, dass die der Rechnung vorausgehende Orthogonalitätsprüfung nicht überschlagen werden darf!

Der Richtungsvektor der Geraden ist insbesondere dann nicht orthogonal zum Normalenvektor der Ebene, wenn die beiden Vektoren linear abhängig sind:

(17.3) Satz

Sei  $e : \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$  eine Ebene und  $g : \vec{X} = \vec{B} + \rho \vec{w}$  eine Gerade.

Die Gerade  $g$  steht genau dann senkrecht auf der Ebene  $e$ , wenn ihr Richtungsvektor  $\vec{w}$  und der Normalenvektor der Ebene  $\vec{n}$  linear abhängig sind.

Beweis:

Seien  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene  $e$ ; dann gilt:

- $g \perp e$
- $\Leftrightarrow$  Der Richtungsvektor  $\vec{w}$  ist orthogonal zu  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  [Satz (15.8)]
- $\Leftrightarrow$   $\vec{w}$  ist ein Normalenvektor von  $e$  [Hinreichendes Kriterium (15.11)]
- $\Leftrightarrow$   $\vec{w}$  und  $\vec{n}$  sind linear abhängig [2. Normalenvektorsatz (15.13)]

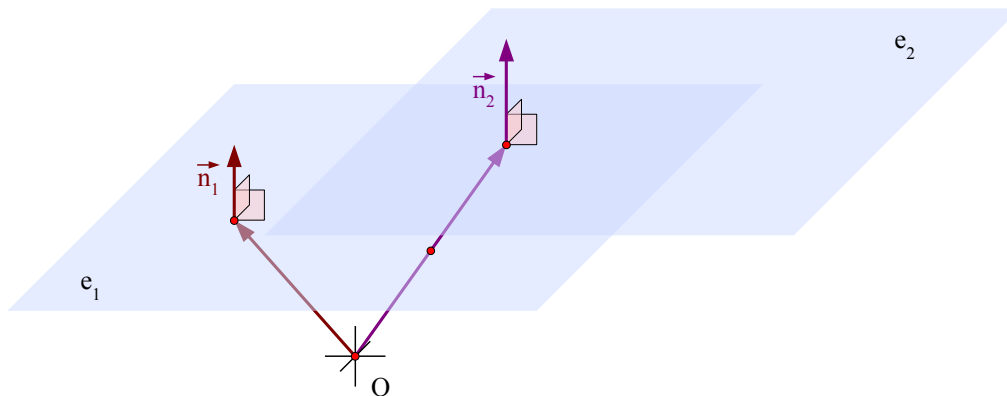
Wir können unsere bisher gemachten Überlegungen in einem erweiterten Analyse-Raster für die Lagebeziehung zwischen einer Geraden und einer Ebene zusammenfassen.

(17.4) Analyse-Raster

Der Richtungsvektor von $g$ ist orthogonal zum Normalenvektor von $e$			
wahr			falsch
Der Stützpunkt von $g$ gehört zu $e$		$g$ schneidet $e$ in genau einem Punkt	
wahr	falsch	Der RV von $g$ ist linear abhängig vom NV von $e$	
$g$ liegt in $e$	$g \parallel e$	wahr	falsch
		$g \perp e$	$\neg(g \perp e)$



## Abschnitt 2: Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen



### (17.5) Satz

Seien  $e_1: \vec{n}_1 \cdot \vec{X} - \gamma_1 = 0$  und  $e_2: \vec{n}_2 \cdot \vec{X} - \gamma_2 = 0$  zwei Ebenen.

Die Ebenen  $e_1$  und  $e_2$  sind genau dann parallel oder identisch, wenn ihre Normalenvektoren  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  linear abhängig sind.

Die Ebenen  $e_1$  und  $e_2$  schneiden sich genau dann in einer Geraden, wenn ihre Normalenvektoren  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  linear unabhängig sind.

Beweis:

Seien  $\vec{u}_1, \vec{v}_1$  und  $\vec{u}_2, \vec{v}_2$  je zwei linear unabhängige Richtungsvektoren von  $e_1$  beziehungsweise  $e_2$ .

Dann gilt der Reihe nach:

- $e_1 \parallel e_2 \vee e_1 = e_2$
- $\Leftrightarrow \vec{u}_1$  und  $\vec{v}_1$  sind Linearkombinationen von  $\vec{u}_2$  und  $\vec{v}_2$  [Analyse-Raster (12.4)]
- $\Leftrightarrow \vec{u}_1$  und  $\vec{v}_1$  sind Richtungsvektoren von  $e_2$  [Bemerkung (9.6)]
- $\Leftrightarrow \vec{n}_2$  ist orthogonal zu  $\vec{u}_1$  und  $\vec{v}_1$  [Definition (15.10)]
- $\Leftrightarrow \vec{n}_2$  ist ein Normalenvektor von  $e_1$  [Hinreichendes Kriterium (15.11)]
- $\Leftrightarrow \vec{n}_2$  und  $\vec{n}_1$  sind linear abhängig [2. Normalenvektorsatz (15.13)]

Hinsichtlich der zweiten Behauptung des Satzes ist nichts weiter zu zeigen; sie ist äquivalent zur ersten, weil es im Modellraum  $\mathbb{R}^3$  keine windschiefen Ebenen gibt.

Aus Satz (17.5) folgt mit dem 2. Normalenvektorsatz (15.13), dass die beiden Untervektorräume, die die Normalenvektoren zweier paralleler oder identischer Ebenen bilden, identisch sind:

### (17.6) Korollar

Sind  $e_1$  und  $e_2$  zwei Ebenen die parallel oder identisch sind, dann ist jeder Normalenvektor von  $e_1$  auch ein Normalenvektor von  $e_2$  und umgekehrt.

Der Beweis von Satz (17.5) liefert darüber hinaus ein nützliches Zwischenresultat:

### (17.7) Korollar

Seien  $e_1: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$  und  $e_2: \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$  zwei Ebenen.

Die Ebenen  $e_1$  und  $e_2$  sind genau dann parallel oder identisch, wenn der Normalenvektor  $\vec{n}$  von  $e_2$  orthogonal zu den Richtungsvektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  von  $e_1$  ist.



Zu zwei Ebenen, die weder parallel noch identisch sind, ist anzumerken, dass die Bestimmung der Schnittgeraden nach der im Beispiel (17.2) vorgestellten Methode erfolgen kann. Das zeigt das folgende Beispiel (17.8).

Dort ist, wie in Korollar (17.7) vorausgesetzt, eine der beiden Ebenen durch eine Punktrichtungsgleichung und die andere durch eine Normalengleichung gegeben.

Sind beide Ebenen mit demselben Gleichungstyp beschrieben, ist zwecks Anwendung des Verfahrens für eine Ebene der Gleichungstyp zu wechseln.

### (17.8) Beispiel (Schnittgeradenberechnung)

Gegeben sind die Ebenen  $e_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$  und  $e_2: \begin{pmatrix} -9 \\ 31 \\ -29 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} - 270 = 0$ .

$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$  ist ein Normalenvektor von  $e_1$ . Offenbar ist dieser linear unabhängig vom Normalenvektor der Ebene  $e_2$ . Also schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden  $g$ .

Jeder Punkt  $X$ , der den beiden Ebenen gemeinsam ist, muss beide Ebenengleichungen erfüllen. Durch Einsetzen des Punktrichtungsterms der Gleichung von  $e_1$  in die Normalengleichung von  $e_2$  erhalten wir:

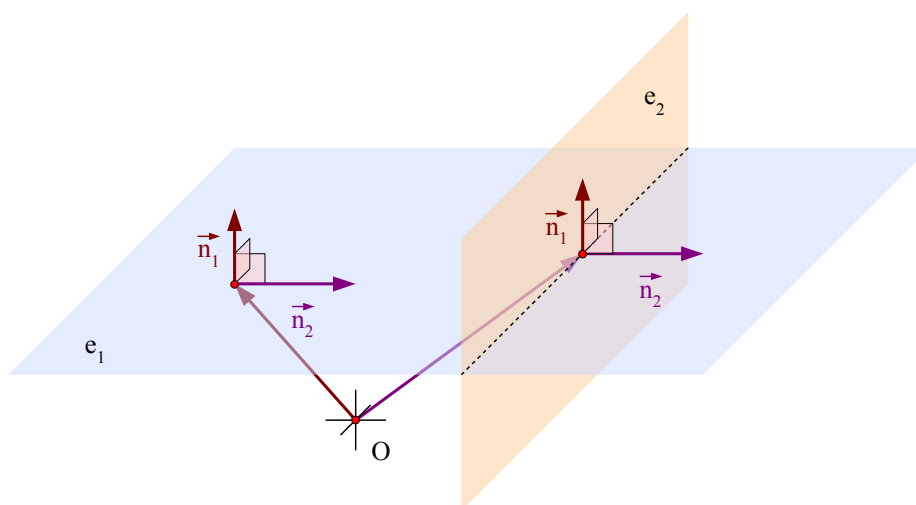
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -9 \\ 31 \\ -29 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \right] - 270 &= 0 \\ \Leftrightarrow 42 + 152\lambda + 380\mu - 270 &= 0 & \Leftrightarrow 152\lambda = -380\mu + 228 \\ \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{2}\mu + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Indem wir diese lineare Beziehung zwischen den Parametern  $\lambda$  und  $\mu$  in der Ebenengleichung von  $e_1$  verwenden, erhalten wir die Gleichung der Schnittgeraden  $g$ :

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \left(-\frac{5}{2}\mu + \frac{3}{2}\right) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Auch hier ist wieder anzumerken, dass der initiale Einsetzvorgang, der auf eine lineare Gleichung mit den Variablen  $\lambda$  und  $\mu$  führt, nur den Charakter einer Implikation hat. Trotzdem ist gesichert, dass die implizierte Gleichung die gesuchte Schnittgerade beschreibt, weil deren Existenz vorab gesichert worden ist.

Die Normalenvektoren zweier Ebenen sind insbesondere dann linear unabhängig, wenn sie orthogonal sind. Es liegt in diesem Fall eine besondere Lagebeziehung vor, die wir bislang noch nicht erklärt haben.





**(17.9) Definition**

Gegeben seien zwei Ebenen  $e_1$  und  $e_2$ .

Wir sagen, *die Ebenen  $e_1$  und  $e_2$  stehen senkrecht aufeinander*, und schreiben  $e_1 \perp e_2$ , wenn jeder Normalenvektor von  $e_1$  ein Richtungsvektor von  $e_2$  und jeder Normalenvektor von  $e_2$  ein Richtungsvektor von  $e_1$  ist.

Nach dieser Begriffseinführung können wir den angekündigten Sachverhalt formulieren:

**(17.10) Satz**

Seien  $e_1 : \vec{n}_1 \cdot \vec{X} - \gamma_1 = 0$  und  $e_2 : \vec{n}_2 \cdot \vec{X} - \gamma_2 = 0$  zwei Ebenen.

Die beiden Ebenen stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihre Normalenvektoren orthogonal sind.

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “:

Die Beweisrichtung ist offenbar trivial.

„ $\Leftarrow$ “:

Gelte also  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ .

Sei dann  $\vec{m}_1$  ein weiterer Normalenvektor von  $e_1$  und  $\vec{m}_2$  ein weiterer Normalenvektor von  $e_2$ .

Nach dem 2. Normalenvektorsatz (15.13) sind diese linear abhängig von  $\vec{n}_1$  beziehungsweise  $\vec{n}_2$ ; sie können also mit Hilfe zweier Skalare  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  als  $\vec{m}_1 = \lambda_1 \vec{n}_1$  und  $\vec{m}_2 = \lambda_2 \vec{n}_2$  geschrieben werden. Es folgt:

$$\vec{m}_1 \cdot \vec{n}_2 = (\lambda_1 \vec{n}_1) \cdot \vec{n}_2 = \lambda_1 (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = 0 \quad \text{und} \quad \vec{m}_2 \cdot \vec{n}_1 = (\lambda_2 \vec{n}_2) \cdot \vec{n}_1 = \lambda_2 (\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1) = 0$$

Dem 1. Normalenvektorsatz (15.12) zufolge ist  $\vec{m}_1$  ein Richtungsvektor von  $e_2$  und  $\vec{m}_2$  ein Richtungsvektor von  $e_1$ .

Da die Normalenvektoren zweier Ebenen, die senkrecht aufeinander stehen, orthogonal sind, sind diese auch linear unabhängig. Gemäß Satz (17.5) müssen sich die Ebenen in einer Geraden schneiden.

**(17.11) Anmerkung**

Stehen zwei Ebenen senkrecht aufeinander, so schneiden sie sich in einer Geraden.

Auch die Überlegungen im 2. Abschnitt dieses Paragraphen können wir in einem erweiterten Analyse-Raster für die Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen zusammenfassen:

**(17.12) Analyse-Raster**

Die Normalenvektoren der Ebenen e und f sind linear abhängig			
wahr			falsch
Der Stützpunkt von f gehört zu e		e und f schneiden sich in einer Geraden	
wahr	falsch		
Die Normalenvektoren von e und f sind orthogonal		Die Normalenvektoren von e und f sind orthogonal	
e = f		e    f	
		wahr	falsch
		e ⊥ f	¬(e ⊥ f)



In Ergänzung zu Satz (17.10) formulieren wir noch eine zweite handliche Operationalisierung der Definition (17.9).

**(17.13) Bemerkung**

Gegeben seien zwei Ebenen  $e_1$  und  $e_2$ .

Die beiden Ebenen stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ein Normalenvektor einer der beiden Ebenen ein Richtungsvektor der anderen Ebene ist.

Beweis:

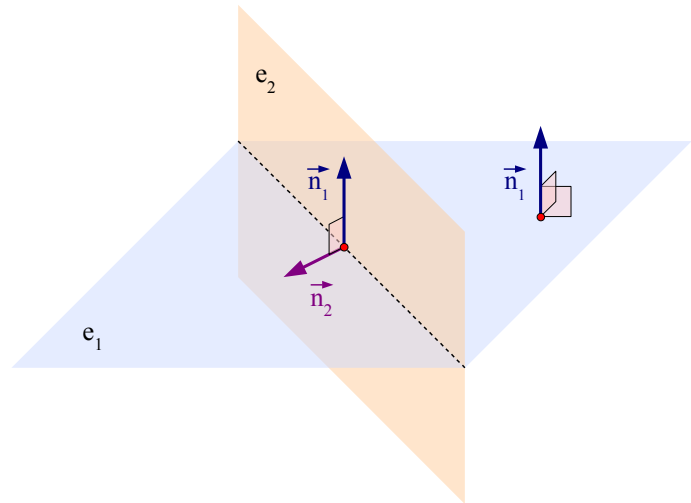
„ $\Rightarrow$ “:

Die Beweisrichtung ist wiederum trivial.

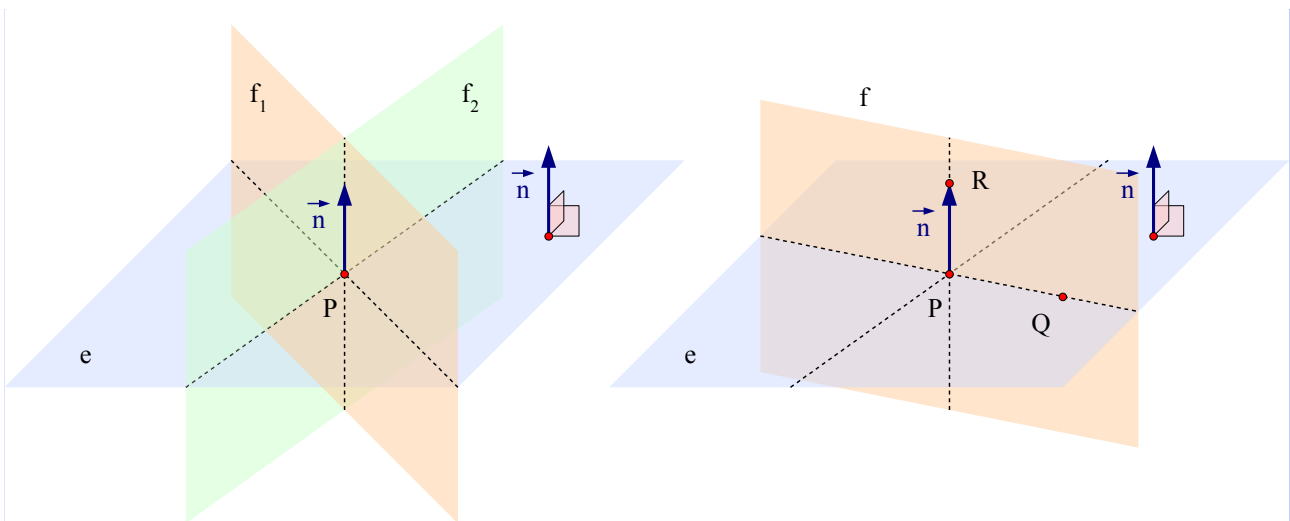
„ $\Leftarrow$ “:

Sei o.B.d.A.  $\vec{n}_1$  ein Normalenvektor der Ebene  $e_1$  gleichzeitig ein Richtungsvektor von  $e_2$ .

Ist nun  $\vec{n}_2$  irgendein Normalenvektor der Ebene  $e_2$ , so ist  $\vec{n}_2$  gemäß Definition (15.10) orthogonal zu  $\vec{n}_1$ . Gemäß Satz (17.10) stehen die beiden Ebenen senkrecht aufeinander.



Und es folgt noch eine letzte Bemerkung, die für spätere Konstruktionen von Bedeutung ist.



**(17.14) Bemerkung**

Ist auf einer Ebene  $e$  ein Punkt  $P$  gegeben, so gibt es unendlich viele Ebenen, die senkrecht auf  $e$  stehen und diesen Punkt  $P$  enthalten.

Ist auf der Ebene  $e$  neben  $P$  ein weiterer von  $P$  verschiedener Punkt  $Q$  gegeben, so gibt es nur genau eine Ebene, die senkrecht auf  $e$  steht und ebenfalls die beiden Punkte  $P$  und  $Q$  enthält.

Beweis:

Wir beginnen mit der zweiten Aussage. Ist  $\vec{n}$  ein vom Nullvektor verschiedener Normalenvektor der Ebene  $e$ , so ist  $\vec{n}$  ein Richtungsvektor einer jeden Ebene  $f$ , die senkrecht auf  $e$  steht. Deshalb ist durch  $\vec{R} := \vec{P} + \vec{n}$  immer ein von  $P$  verschiedener Punkt  $R$  auf  $f$  definiert. Der Punkt  $R$  kann nicht mit  $Q$  übereinstimmen, weil  $R$  nicht auf  $e$  liegt. Also verläuft  $f$  durch die nicht kollinearen Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$ . Folglich gilt  $f = PQR$ .

Zur ersten Aussage ist nur anzumerken, dass unendlich viele auf  $e$  senkrecht stehenden Ebenen konstruiert werden können, indem zu den Punkten  $P$  und  $R$  jeweils ein von  $P$  verschiedener dritter Punkt  $Q$  auf der Ebene  $e$  zur Definition der senkrechten Ebene hinzugenommen wird.