



## Übungen zu §17

### Übung 17.1

Untersuche die Lage, die die Gerade durch die Punkte A und B zur Ebene e einnimmt. Schneidet die Gerade AB die Ebene e, untersuche, ob AB eine Normale zu e ist und berechne den Schnittpunkt S.

- (a)  $e: 2x - 5y + 6z = 11$        $A = (11; 1; -4)$        $B = (15; 2; -6)$   
 (b)  $e: 5x - 2y - z = -17$        $A = (3; -4; 3)$        $B = (4; -2; 4)$   
 (c)  $e: 8x - 4y - 5z = 23$        $A = (4; 6; -3)$        $B = (7; 7; 1)$   
 (d)  $e: -4x + 3y + 2z = -16$        $A = (-14; 12; 4)$        $B = (-6; 6; 0)$

### Übung 17.2

Gegeben ist die Gerade durch die Punkte  $A = (-1; -10; 6)$  und  $B = (-2; -12; 7)$  sowie für  $t \in \mathbb{R}$  die Schar von Ebenen  $e_t: tx + 2ty + 5z = 15$

- (a) Bestimme den Parameter t so, dass die Gerade AB zu einer Normalen der Ebene  $e_t$  wird. Bestimme für diesen Parameterwert auch den Schnittpunkt S von  $e_t$  und AB.  
 (b) Für welchen Parameterwert t enthält die Ebene  $e_t$  die Gerade AB?

### Übung 17.3

- Zeige, dass die Geraden  $g_1$  und  $g_2$  eine Ebene e definieren, und formuliere eine Normalengleichung von e.
- Untersuche die Lage der Geraden  $g_3$  bezüglich e wie in Übung 17.1

(a)  $g_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$        $g_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$        $g_3: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b)  $g_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$        $g_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$        $g_3: \vec{X} = \begin{pmatrix} -8 \\ -18 \\ 3 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 11 \\ 19 \\ -1 \end{pmatrix}$

### Übung 17.4

Die Übung 17.4, die vor den Übungen 17.5 und 17.6 bearbeitet werden sollte, wird aus Platzgründen auf der nächsten Seite präsentiert.

### Übung 17.5

Die folgenden linearen Gleichungssysteme beschreiben pro Zeile je eine Ebene.

- Untersuche jeweils, welche der acht in Übung 17.4 dargestellten Lagebeziehungen zutrifft.
- Wende den Gauß-Algorithmus an, um die Lösungsmenge zu bestimmen. Gib diese in adäquater Form an.

(a)  $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 6 \\ 6x - 2y + 9z = 18 \\ -4x + 8y - 6z = -72 \end{cases}$       (b)  $\begin{cases} -x + 2y + z = 4 \\ x - 2y - 4z = -1 \\ 2x - y - 2z = 4 \end{cases}$       (c)  $\begin{cases} 2x - 4y - 2z = -14 \\ 3x + 2y + 13z = -5 \\ -x - y - 5z = 1 \end{cases}$

### Übung 17.6

Ergänze die Gleichung (1)  $4x - y + z = 3$  zu einem System von drei Gleichungen, dessen Lösungsmenge

- (a) leer ist,  
 (b) aus den Punkten der durch die Gleichung (1) beschriebenen Ebene besteht.  
 (c) aus dem Punkt  $S = (1; 3; 2)$  besteht.



Übung 17.4

$$\begin{aligned}
 e_1 &: a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\
 e_2 &: a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\
 e_3 &: a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3
 \end{aligned}$$

Ein lineares Gleichungssystem, das aus drei Gleichungen mit drei Variablen besteht, beschreibt die Schnittmenge von drei Ebenen im Raum. Die drei Ebenen können, qualitativ betrachtet, in acht verschiedenen Lagebeziehungen zu einander stehen. Beachte, dass Rollentausche zwischen den Ebenen stellen keine neuen Qualitäten erzeugen, weil Ummummerierungen der Indizes diese rückgängig machen.

Die folgende Übersicht gibt diese acht Fälle wieder und veranschaulicht sie durch jeweils eine Skizze.

- Machte zu jedem Fall eine Aussage über die drei Normalenvektoren  $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$  der Ebenen  $e_1, e_2, e_3$ .
- Machte zu jedem Fall eine Aussage über die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des linearen Gleichungssystems.

	Lagebeziehung	Skizze
L1	Alle drei Ebenen sind identisch: $e_1 = e_2 = e_3$	
L2	Zwei Ebenen sind identisch, die dritte liegt parallel: $e_1 = e_2 \wedge e_1 \parallel e_3$	
L3	Zwei Ebenen sind identisch, die dritte schneidet: $e_1 = e_2 \wedge e_1 \cap e_3 \neq \emptyset$	
L4	Alle drei Ebenen sind paarweise parallel: $e_1 \parallel e_2 \parallel e_3$	
L5	Zwei Ebenen sind parallel, die dritte schneidet: $e_1 \parallel e_2 \wedge e_1 \cap e_3 \neq \emptyset$	
L6	Alle drei Ebenen schneiden sich in einer gemeinsamen Geraden g: $e_1 \cap e_2 \cap e_3 = g$	
L7	Zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden, die parallel zur dritte Ebene verläuft: $e_1 \cap e_2 = g \wedge e_3 \parallel g$	
L8	Zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden, die die dritte Ebene durchstößt.	