Übung 17.1

(a) $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $e: \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 11 = 0$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 8 - 5 - 12 = -9 \neq 0$. Da der Richtungsvektor von AB und der Normalenvektor nicht orthogonal sind, schneidet AB die Ebene e in genau einem Punkt S. Da die beiden Vektoren nicht linear abhängig sind, ist AB keine Normale von e.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] - 11 = 0 \Leftrightarrow -7 - 9\lambda - 11 = 0 \Leftrightarrow -9\lambda = 18 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(b) $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $e: \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 17 = 0$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Da der Richtungsvektor $\vec{AB}$ und der Normalenvektor $\vec{n}$ von e orthogonal sind, liegt AB parallel zu oder in der Ebene e.

Punktprobe: $A \in e \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + 17 = 0 \Leftrightarrow 20 + 17 = 0$ [falsch]

Es gilt $AB \parallel e$.

(c) $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $e: \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 23 = 0$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$

Da der Richtungsvektor $\vec{AB}$ und der Normalenvektor von e orthogonal sind, liegt AB parallel zu oder in der Ebene e.

Punktprobe: $A \in e \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} - 23 = 0 \Leftrightarrow 23 - 23 = 0$

Es gilt $AB \subset e$.

(d) $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix}-14\\12\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}8\\-6\\-4\end{pmatrix}$; $e: \begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + 16 = 0$; $\begin{pmatrix}8\\-6\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix} = -58+16 \neq 0$

Offenbar sind $\vec{AB}$ und der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene linear abhängig: $\vec{AB} = -2\cdot\vec{n}$. Also ist AB eine Normale von e.

$$\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-14\\12\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}8\\-6\\-4\end{pmatrix}\right] + 16 = 0 \iff 100 + \lambda\cdot(-58) + 16 = 0 \iff \lambda = 2$$

Der Lotfußpunkt S ist gegeben durch $\vec{S} = \begin{pmatrix}-14\\12\\4\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}8\\-6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}$

Übung 17.2

$AB: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\-10\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$; $e_t: \begin{pmatrix}t\\2t\\5\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - 15 = 0$

(a) AB ist eine Normale von e_t, falls $\vec{AB}$ und der Normalenvektor $\vec{n_t}$ von e_t linear abhängig sind.

Das ist genau dann der Fall, wenn es $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $\lambda\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\2t\\5\end{pmatrix}$

(1) $-\lambda = t$

[(2) $-2\lambda = 2t$]

(3) $\lambda = 5$

(3)→(1): $-5 = t$ (4)

(3),(4)→(2): $-2\cdot 5 = 2\cdot(-5)$ [wahr]

Für $t = -5$ ist AB eine Normale von e_t.

$\vec{S} = \begin{pmatrix}-1\\-10\\6\end{pmatrix} + 5$

$$\begin{pmatrix}-5\\-10\\5\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-1\\-10\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right] - 15 = 0 \iff 135 + 30\lambda - 15 = 0 \iff \lambda = -4$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix}-1\\-10\\6\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$$

(b) $\vec{AB}\cdot\vec{n_t} = 0 \iff -t - 4t + 5 = 0 \iff t = 1$

(Nur) Für $t=1$ ist AB parallel zu oder in der Ebene e_t.

Punktprobe: $\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-10\\6\end{pmatrix} - 15 = 0 \iff 9 - 15 = 0$ [falsch]

Da $A \notin e_1$ gilt, folgt $AB \parallel e_1$. Folglich gibt es keinen Wert $t \in \mathbb{R}$, für den $AB \subset e_t$ richtig ist.

Übung 17.3

(a) Weil $\begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}$ gilt, sind die Richtungsvektoren von g_1 und g_2 linear abhängig. Also sind g_1 und g_2 parallel oder identisch.

Punktprobe: $\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}2\\6\\-3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}$ [nicht lösbar]

g_1 und g_2 sind parallel und definieren daher die Ebene e:

$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4-2\\5+1\\1-4\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\6\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18\\2\\-8\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von e. e: $\begin{pmatrix}-18\\2\\-8\end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 70 = 0$

$\begin{pmatrix}-18\\2\\-8\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\-4\\-1\end{pmatrix} = 0-8+8=0$; Da der Richtungsvektor von g_3 und der Normalenvektor von e orthogonal sind, gilt $g_3 \parallel e$ oder $g_3 \subset e$.

Punktprobe: $\begin{pmatrix}-18\\2\\-8\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\13\end{pmatrix} + 70 = 0 \iff -70+70=0$ [wahr]

Die Gerade g_3 liegt in der Ebene e.

(b) Offenbar sind die Richtungsvektoren von g_1 und g_2 linear unabhängig. Also sind g_1 und g_2 windschief, oder sie schneiden sich in genau einem Punkt. Verkürzter Schnittpunktansatz:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad 3\lambda - 2\mu = -12\\
&(2)\quad -2\lambda + \mu = 7 \iff -4\lambda + 2\mu = 14\\
&[(3)\quad -5\lambda - 3\mu = 1]
\end{aligned}$$

$(1)+(2)$: $-\lambda = 2 \iff \lambda = -2$ (4)

$(4) \to (2)$: $-2\cdot(-2) + \mu = 7 \iff \mu = 3$ (5)

$(4),(5) \to (3)$: $-5\cdot(-2) - 3\cdot 3 = 1 \iff 1 = 1$ [wahr]

g_1 und g_2 schneiden sich im Punkt S mit $\vec{S} = \begin{pmatrix}9\\-3\\-8\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}3\\-2\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$

g_1 und g_2 definieren die Ebene e: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-2\\-5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}3\\-2\\-5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\-19\\1\end{pmatrix}$$ ist ein Normalenvektor von e.

Offenbar ist der Richtungsvektor von g_3 linear abhängig von diesem Normalenvektor. Also ist g_3 eine Normale von e.

$$e: \begin{pmatrix}-11\\-19\\1\end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix}-11\\-19\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix}-11\\-19\\1\end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 50 = 0$$

$$\begin{pmatrix}-11\\-19\\1\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}-8\\-18\\3\end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix}11\\19\\-1\end{pmatrix} \right] + 50 = 0 \iff 433 - 483\rho + 50 = 0 \iff \rho = 1$$

Der Durchstoßpunkt von g_3 in e ist gegeben durch $\vec{L} := \begin{pmatrix}-8\\-18\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}11\\19\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = \vec{S}$

<u>Übung 17.4</u>

(L1) $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ und $\vec{n_3}$ sind paarweise linear abhängig.
Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ besteht aus den Punkten der drei identischen Ebenen: $\mathcal{L} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1\} = e_1 = e_2 = e_3$

(L2) $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ und $\vec{n_3}$ sind paarweise linear abhängig. $\mathcal{L} = \emptyset$

(L3) $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ sind linear abhängig. $\vec{n_3}$ ist linear unabhängig von $\vec{n_1}$ und von $\vec{n_2}$.
Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ besteht aus den Punkten der Schnittgerade g von e_1 und e_3 bzw. e_2 und e_3. $\mathcal{L} = e_1 \cap e_3$

(L4) $\vec{n_1}$, $\vec{n}$ und $\vec{n_3}$ sind paarweise linear abhängig. $\mathcal{L} = \emptyset$

(L5) $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ sind linear abhängig. $\vec{n_3}$ ist linear unabhängig von $\vec{n_1}$ und von $\vec{n_2}$.
$\mathcal{L} = \emptyset$

(L6) $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ und $\vec{n_3}$ sind zwar paarweise linear unabhängig, insgesamt aber linear abhängig. $\mathcal{L} = g$

(L7) $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ und $\vec{n_3}$ sind zwar paarweise linear unabhängig, insgesamt aber linear abhängig. $\mathcal{L} = \emptyset$

(L8) $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ und $\vec{n_3}$ sind linear unabhängig.
Die Lösungsmenge besteht aus dem Punkt S, in dem die Schnittgerade von e_1 und e_2 die Ebene e_3 durchstößt. $\mathcal{L} = \{S\}$

Übung 17.5

(a) $e_1: \begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-6=0$; $e_2: \begin{pmatrix}6\\-2\\9\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-18=0$; $e_3: \begin{pmatrix}-4\\8\\-6\end{pmatrix}\cdot\vec{x}+72=0$

Die Normalenvektoren von e_1 und e_3 sind linear abhängig;

also gilt $e_1 \parallel e_3$ oder $e_1 = e_3$.

Ist P ein Punkt von e_1, so gilt $\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{P}=6$ und $\begin{pmatrix}-4\\8\\-6\end{pmatrix}\cdot\vec{P}=-2\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{P}=-12 \neq -72$

Weil P die Gleichung von e_3 nicht erfüllt, gilt $e_1 \parallel e_3$

Der Normalenvektor von e_2 ist linear unabhängig vom Normalenvektor von e_1 und vom Normalenvektor von e_3.

e_2 schneidet also sowohl e_1 als auch e_3 in jeweils einer Geraden g_1 bzw. g_3.

Offensichtlich liegt also der Fall L5 aus Übung 17.4 vor.

(1) $2x - 4y + 3z = 6 \iff 4x - 8y + 6z = 12$

(2) $6x - 2y + 9z = 18$

(3) $-4x + 8y - 6z = -72$

(1)+(3): $0 = 60$ [falsch]

Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

(b) $e_1: \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-4=0$; $e_2: \begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}\cdot\vec{x}+1=0$; $e_3: \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}-4=0$

Die Normalenvektoren der drei Ebenen sind paarweise linear unabhängig (aber nicht orthogonal). Je zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden g_{12}, g_{13} bzw. g_{23}.

Es kann einer der drei Fälle L6, L7 oder L8 vorliegen.

Wir prüfen, ob die drei Vektoren linear abhängig sind:

(1) $-\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \iff -2\alpha + 2\beta + 4\gamma = 0$

(2) $2\alpha - 2\beta - \gamma = 0$

(3) $\alpha - 4\beta - 2\gamma = 0$

(4),(5) → (1): $-\alpha = 0 \iff \alpha = 0$

(1)+(2) $3\gamma = 0 \iff \gamma = 0$ (4)

(1)+(3) $-3\beta = 0 \iff \beta = 0$ (5)

Der Nullvektor lässt sich aus den drei Normalenvektoren nur auf die triviale Weise kombinieren; also sind sie linear unabhängig.

Damit ist geklärt, dass der Fall L8 vorliegt.

$$(1)\quad -x + 2y + z = 4$$
$$(2)\quad x - 2y - 4z = -1$$
$$(3)\quad 2x - y - 2z = 4$$

$$(1)+(2)\qquad -3z = 3 \iff z = -1 \quad (4)$$
$$(4)\to(2)\qquad x - 2y = -5 \iff -2x + 4y = 10 \quad (5)$$
$$(4)\to(3)\qquad 2x - y = 2 \quad (6)$$
$$(5)+(6)\qquad 3y = 12 \iff y = 4 \quad (7)$$
$$(4),(7)\to(1)\qquad -x + 8 - 1 = 4 \iff -x = -3 \iff x = 3$$

Die drei Ebenen schneiden sich im Punkt $S = (3;4;-1)$.

c) $e_1: \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 14 = 0$; $e_2: \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 5 = 0$; $e_3: \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1 = 0$

Die Normalenvektoren der drei Ebenen sind paarweise linear unabhängig. Je zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

Es kann wieder einer der drei Fälle L6, L7 oder L8 vorliegen.

$$(1)\quad 2\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \iff -10\alpha - 15\beta + 5\gamma = 0$$
$$(2)\quad -4\alpha + 2\beta - \gamma = 0$$
$$(3)\quad -2\alpha + 13\beta - 5\gamma = 0$$

$$(1)-(2):\quad 6\alpha + \beta = 0 \iff \beta = -6\alpha \quad (4)$$
$$(1)+(3):\quad -12\alpha - 2\beta = 0 \iff \beta = -6\alpha$$
$$(4)\to(1):\quad 2\alpha + 3\cdot(-6\alpha) - \gamma = 0 \iff \gamma = -16\alpha$$

Es folgt: $(\alpha = 1)$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} - 16\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \vec{0}$

Gemäß Nullvektorkriterium sind die drei Vektoren linear abhängig. Es liegt also der Fall L6 oder L7 vor.

Wir berechnen die Schnittgerade der Ebenen e_1 und e_2

$$e_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-13\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-13\\0\\3\end{pmatrix}\right] + 14 = 0 \iff -14 - 16\lambda - 32\mu + 14 = 0$$

$$\iff \lambda = -2\mu$$

Die Schnittgerade g hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-9\\-6\\3\end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor von g ist orthogonal zum Normalenvektor von e_3:

$$\begin{pmatrix}-9\\-6\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix} = 9+6-15=0$$; g verläuft parallel zu oder in e_3

Punktprobe: $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} - 1 = 0 \iff 3-2-1=0$ [wahr]. $g \subset e_3$!

$$\begin{aligned}
&(1) \quad 2x - 4y - 2z = -14\\
&(2) \quad 3x + 2y + 13z = -5 \iff 6x + 4y + 26z = -10\\
&(3) \quad -x - y - 5z = 1 \iff -2x - 2y - 10z = 2\\
&(1)+(2): \quad 8x + 24z = -24 \qquad (4)\\
&(2)+(3): \quad x + 3z = -3 \qquad (5) \iff x = -3z - 3\\
&(5)\to(1): \quad 2(-3z-3) - 4y - 2z = -14 \iff -4y = 8z - 8 \iff y = -2z + 2
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist gegeben durch $\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 : x = -3z-3 \wedge y = -2z+2 \wedge z\in\mathbb{R}\}$; sie stimmt überein mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-9\\-6\\3\end{pmatrix}$.

Übung 17.6

(a) (1) $4x - y + z = 3$
(2) $4x - y + z = 2$
(3) $4x - y + z = 1$

(b) (1) $4x - y + z = 3$
(2) $8x - 2y + 2z = 6$
(3) $-12x + 3y - 3z = -9$

(c) (1) $4x - y + z = 3$
(2) $x - y + z = 0$
(3) $3x + y - 3z = 0$

zu (c): Offenbar erfüllt S alle drei Gleichungen. S ist der einzige gemeinsame Punkt, weil die drei Normalenvektoren linear unabhängig sind.