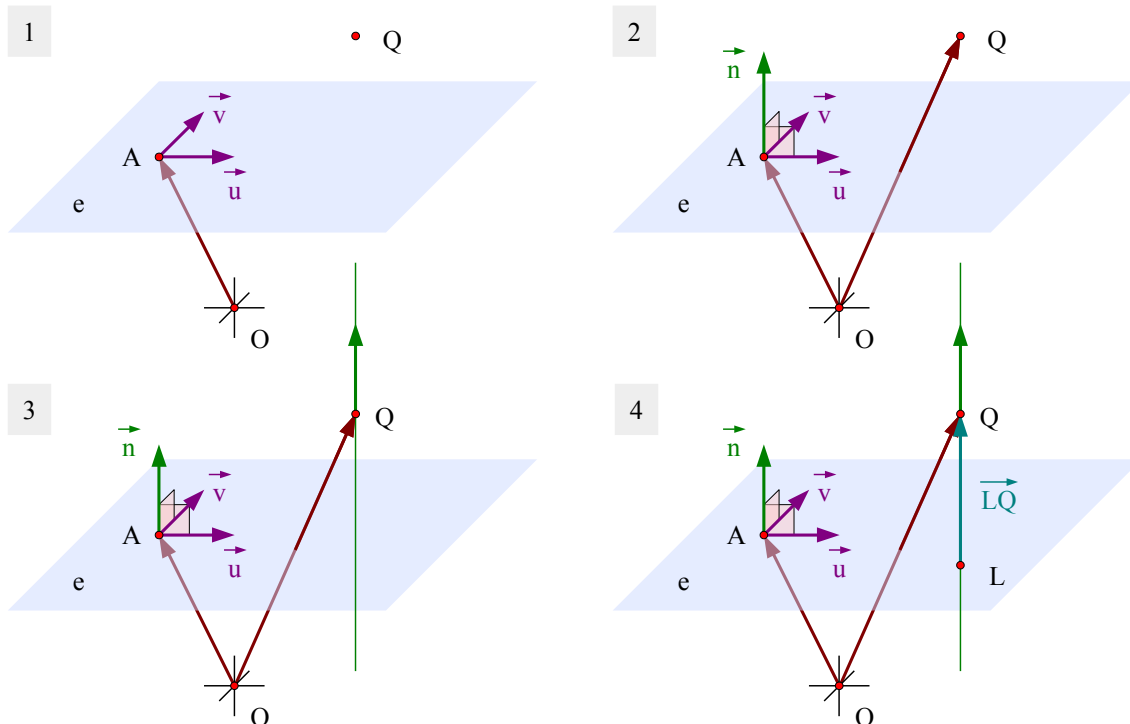




§16 Normalengleichungen von Ebenen

In vielen praktischen Problemen, wie beispielsweise bei Volumenberechnungen, sind Abstände von Punkten zu einer Ebene zu berechnen. Im vorangegangenen Paragraphen wurde dazu ein gültiges Verfahren entwickelt:



1. Erfasse die Ebene mit einer Punkttrichtungsgleichung.
2. Bilde einen Normalenvektor der Ebene mit Hilfe ihrer Richtungsvektoren.
3. Beschreibe das Lot von dem gegebenen Punkt auf die Ebene mit einer Punkttrichtungsgleichung unter Verwendung des Normalenvektors als Richtungsvektor .
4. Berechne den Lotfußpunkt als Schnittpunkt von Lot und Ebene.
5. Berechne den Abstand des Punktes von der Ebene als Länge des Vektors, der den Lotfußpunkt auf den Punkt abbildet.

Indem wir dieses Verfahren in allgemeiner Form, das heißt, ohne Verwendung konkreter Koordinaten durchführen, ermitteln wir eine Formel für den Abstand eines Punktes von einer Ebene. Das Ergebnis dieser Herleitung formuliert der folgende Satz. Sein Beweis gibt exakt die Herleitung wieder:

(16.1) Satz („Hessesche Abstandsformel“)

Sei $e: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ eine Ebene, Q ein Punkt des Modellraumes und \vec{n} ein vom Nullvektor verschiedener Normalenvektor von e .

$$\text{Dann gilt: } d(Q; e) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{Q} - \vec{n} \cdot \vec{A}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AQ}|}{\|\vec{n}\|} .$$

Beweis:

1: $\vec{X} = \vec{Q} + \rho \vec{n}$ ist offensichtlich das Lot von Q auf e . Sei L der Lotfußpunkt von Q .

Als Schnittpunkt vom Lot l und der Ebene e erfüllt L beide Punkttrichtungsgleichungen. Es gibt daher Parameterwerte $\rho, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

- (1) $\vec{L} = \vec{Q} + \rho \vec{n}$ und
- (2) $\vec{L} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$.



Diese Parameterwerte lösen die Schnittpunktgleichung

$$(3) \quad \vec{Q} + \rho \vec{n} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

Da der Vektor \vec{n} orthogonal zu den Vektoren \vec{u} und \vec{v} ist, können wir λ und μ in einem Schritt aus der Gleichung eliminieren, indem wir auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit dem Vektor \vec{n} bilden:

$$(5) \quad \vec{n} \cdot (\vec{Q} + \rho \vec{n}) = \vec{n} \cdot (\vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{Q} + \rho \vec{n}^2 = \vec{n} \cdot \vec{A} \Leftrightarrow \rho = \frac{\vec{n} \cdot \vec{A} - \vec{n} \cdot \vec{Q}}{\vec{n}^2}$$

Wir erhalten den Lotfußpunkt L, indem wir den in (5) ermittelten Wert für ρ in die Punkttrichtungsgleichung des Lotes l einsetzen. Durch äquivalentes Umformen ergibt sich eine Darstellung für den Vektor \vec{LQ} .

$$(6) \quad \vec{L} = \vec{Q} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{A} - \vec{n} \cdot \vec{Q}}{\vec{n}^2} \vec{n} \Leftrightarrow \vec{QL} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{A} - \vec{n} \cdot \vec{Q}}{\vec{n}^2} \vec{n} \Leftrightarrow \vec{LQ} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{Q} - \vec{n} \cdot \vec{A}}{\vec{n}^2} \vec{n}$$

Es folgt daraus

$$(7) \quad d(Q; e) = \|\vec{LQ}\| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{A} - \vec{n} \cdot \vec{Q}|}{\vec{n}^2} \|\vec{n}\| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{Q} - \vec{n} \cdot \vec{A}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AQ}|}{\|\vec{n}\|}$$

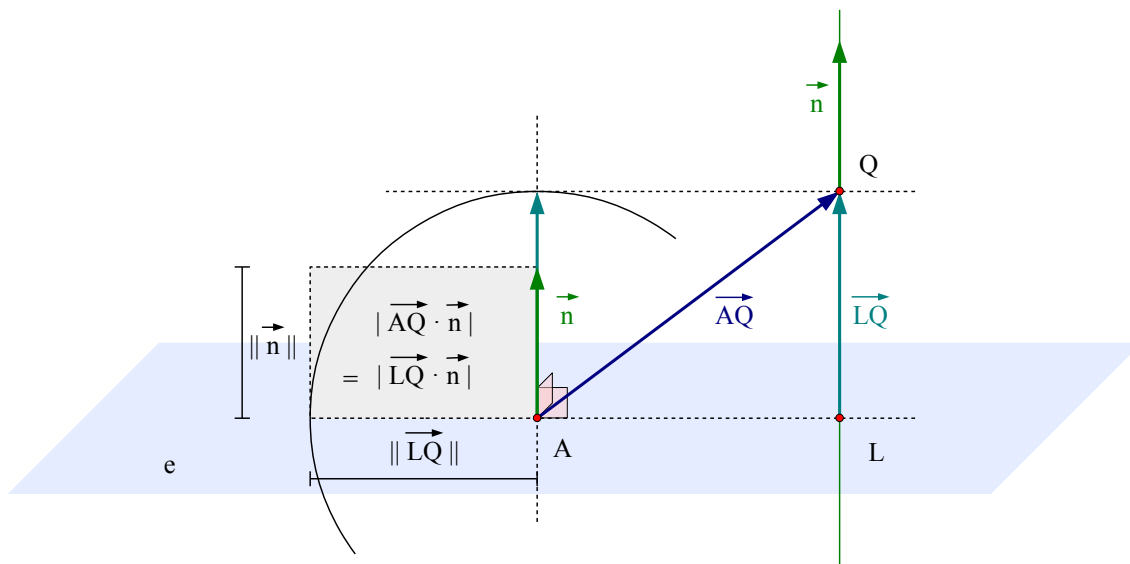
Bemerkenswerter Weise kommen die Koordinaten des Lotfußpunktes, die in der Regel auch nebensächlich sind, in der Hesseschen Abstandsformel nicht vor. Der Abstand eines Punktes von einer Ebene hängt nur von den Koordinaten des Punktes, den Koordinaten des Stützpunktes der Ebene und den Koordinaten ihres Normalenvektors ab!

Bevor wir in der Theorieentwicklung weiter voranschreiten, bemühen wir uns mit Hilfe der folgenden Darstellung um eine anschauliche Deutung der Hesseschen Abstandsformel.

Zunächst stellen wir fest, dass der Vektor \vec{LQ} als Projektion (siehe Definition (14.13)) des Vektors \vec{AQ} auf den Vektor \vec{n} angesehen werden darf:

$$\vec{LQ} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{Q} - \vec{n} \cdot \vec{A}}{\vec{n}^2} \vec{n} = \frac{\vec{n} \cdot (-\vec{A} + \vec{Q})}{\vec{n}^2} \vec{n} = \frac{\vec{AQ} \cdot \vec{n}}{\vec{n}^2} \vec{n} = (\vec{AQ})_n$$

Deshalb liefert der Vektor \vec{LQ} das gleiche Skalarprodukt mit dem Normalenvektor \vec{n} wie der Vektor \vec{AQ} (siehe Bemerkung (14.14)(a)).



Gemäß dem Zusatz zur Cauchy-Schwartzschen Ungleichung (14.15)(2) gilt $|\vec{AQ} \cdot \vec{n}| = |\vec{LQ} \cdot \vec{n}| = \|\vec{LQ}\| \|\vec{n}\|$, weil die Vektoren \vec{LQ} und \vec{n} linear abhängig sind.

Das bedeutet aber, dass wir uns unter dem Zähler $|\vec{n} \cdot \vec{AQ}|$ der Hesseschen Abstandsformel den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen $\|\vec{LQ}\|$ und $\|\vec{n}\|$ vorstellen dürfen. Dividieren wir diesen Flächeninhalt durch eine seiner Seitenlängen, nämlich durch die Länge des Vektors \vec{n} , erhalten wir die andere Seitenlänge, nämlich die Länge des Vektors $\|\vec{LQ}\|$, und damit gemäß Definition (15.23) den Abstand des Punktes Q von der Ebene e.



Nach erfolgreicher anschaulicher Deutung der Hesseschen Abstandsformel lenken wir den Blick auf die scheinbar nebensächliche Bemerkung (15.24). Diese ist in der Tat von großer Tragweite, weil sich aus ihr eine parameterfreie Beschreibung der Ebene ergibt:

(16.2) Satz

Sei e eine Ebene, A ein Punkt von e sowie \vec{n} ein vom Nullvektor verschiedener Normalenvektor von e .

Dann gilt für jeden Raumpunkt $X \in \mathbb{R}^3$:

$$X \in e \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{X} - \vec{n} \cdot \vec{A} = 0$$

Beweis:

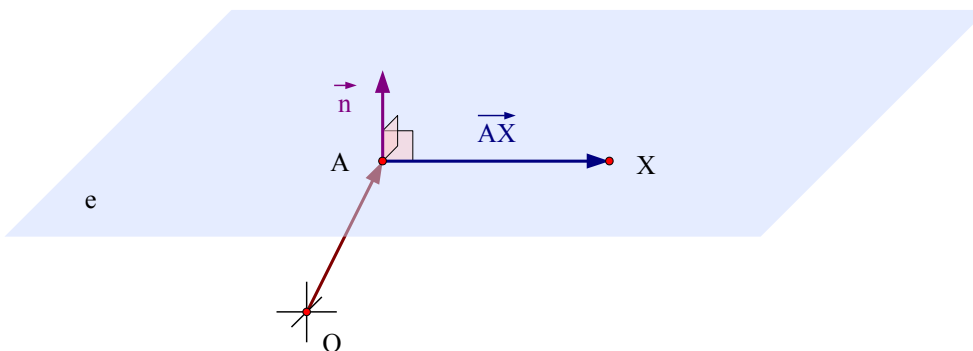
$$X \in e \Leftrightarrow d(X, e) = 0 \Leftrightarrow \frac{|\vec{n} \cdot \vec{X} - \vec{n} \cdot \vec{A}|}{\|\vec{n}\|} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{X} - \vec{n} \cdot \vec{A} = 0$$

Dieser Beweis kann auch ohne die Hessesche Abstandsformel geführt werden:

Gelte $e: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$.

- $X \in e \Leftrightarrow \overrightarrow{AX}$ ist Linearkombination der Vektoren \vec{u} und \vec{v} [Bemerkung (9.6)]
- \Leftrightarrow Die Vektoren \vec{n} und \overrightarrow{AX} sind orthogonal [1. Normalenvektorsatz (15.12)]
- $\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$

Eine Ebene ist also (im Modellraum \mathbb{R}^3 !) durch die Angabe eines Stützpunktes und eines vom Nullvektor verschiedenen Normalenvektors vollständig charakterisiert!



(16.3) Definition

Sei e eine Ebene, A ein Stützpunkt von e und \vec{n} ein vom Nullvektor verschiedener Normalenvektor von e .

Dann heiße die Gleichung $\vec{n} \cdot \vec{X} - \vec{n} \cdot \vec{A} = 0$ *Punktnormalengleichung* der Ebene e .

Wir schreiben kurz $e: \vec{n} \cdot \vec{X} - \vec{n} \cdot \vec{A} = 0$.

Die Nützlichkeit der Punktnormalengleichung kann anhand eines Beispiels einer Punktprobe demonstriert werden:

(16.4) Beispiel

Sei e die Ebene, die durch den Stützpunkt $A = (4; -1; 5)$ und den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bestimmt ist.

Geprüft werden soll, ob der Punkt $Q = (2; -1; 1)$ ein Punkt dieser Ebene ist.



Lösung:

Wir notieren die Punktnormalgleichung der Ebene e ...

$$e : \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} + 11 = 0$$

... und setzen den Ortsvektor von Q ein:

$$Q \in e \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -11 + 11 = 0 \quad [\text{wahr}]$$

Offensichtlich bietet die Punktnormalgleichung große rechnerische Vorteile. Wir werden dieses Erkenntnis im nächsten Paragraphen näher untersuchen.

In diesem Paragraphen soll zunächst die Einführung der Punktnormalgleichung mathematisch abgerundet werden. Dazu stellen wir fest, dass in einer Punktnormalgleichung $\vec{n} \cdot \vec{X} - \vec{n} \cdot \vec{A} = 0$ das Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{A}$ ausgerechnet werden kann. Das Ergebnis ist ein Skalar $\gamma \in \mathbb{R}$. Dieser simple Sachverhalt legt den folgenden Satz nahe:

(16.5) Satz

Sei \vec{n} ein vom Nullvektor verschiedener Vektor und γ eine reelle Zahl.

Dann ist die Punktmenge $e := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0\}$ stets eine Ebene des Modellraumes.

Wir schreiben kurz $e : \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$.

Beweis:

Da \vec{n} nicht der Nullvektor sein soll, besitzt \vec{n} wenigstens eine von 0 verschiedene Koordinate. Gelte o.B.d.A. $n_1 \neq 0$.

Dann gilt für den Punkt $A := (\frac{\gamma}{n_1}; 0; 0)$ offenbar $\vec{n} \cdot \vec{A} = \gamma$.

Daraus ergibt sich aber

$$e : \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{X} - \vec{n} \cdot \vec{A} = 0$$

e ist daher die Ebene, die den Normalenvektor \vec{n} und den Stützpunkt A besitzt.

Eine Gleichung des Typs $\vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$ wird üblicherweise *allgemeine Normalengleichung* genannt, weil aus ihr nicht direkt die Koordinaten eines Stützpunkts ablesbar sind. Der vorangegangene Beweis zeigt jedoch, dass es keine Mühe bereitet, sich einen Stützpunkt zu verschaffen.

Werden Richtungsvektoren für eine Ebene benötigt, die durch eine Normalengleichung gegeben ist, so hilft der 1. Normalenvektorsatz (15.12) weiter. Seinetwegen muss nur nach Vektoren gesucht werden, die orthogonal zum Normalenvektor sind. Dass diese immer leicht zu finden sind, zeigt das folgende Konstruktionsrezept.

Satz (16.6)

Gegeben sei ein vom Nullvektor verschiedener Vektor \vec{n} .

Dann gibt es immer zwei linear unabhängige Vektoren \vec{u} und \vec{v} , die beide orthogonal zum Vektor \vec{n} sind und daher zusammen mit \vec{n} eine Basis des Modellraumes \mathbb{R}^3 bilden.

Beweis:

Gelte $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ und o.B.d.A. $n_1 \neq 0$. Dann erfüllen die Vektoren $\vec{u} := \begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} := \begin{pmatrix} n_3 \\ 0 \\ -n_1 \end{pmatrix}$ die Aussage des

Satzes.

Es ist offensichtlich, wie zu verfahren ist, wenn $n_2 \neq 0$ oder $n_3 \neq 0$ gilt, um zwei linear unabhängige Vektoren zu konstruieren, die orthogonal zum Vektor \vec{n} sind.



Nicht nur aus Gründen der Vollständigkeit wird abschließend auch noch die sogenannte *Koordinatengleichung* einer Ebene eingeführt. Diese ergibt sich direkt durch Ausmultiplizieren des Skalarprodukts $\vec{n} \cdot \vec{X}$.

(16.7) Bemerkung

Sei $e : \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$ eine Ebene.

Dann gilt für jeden Punkt $X = (x; y; z) : X \in e \Leftrightarrow n_1 x + n_2 y + n_3 z = \gamma$.

Die Ebene im Beispiel (16.4) kann also auch durch die Gleichung

$$-6x + 2y + 3z = -11$$

beschrieben werden. Dadurch wird plötzlich klar, dass eine lineare Gleichung in drei Variablen, stets als Gleichung einer Ebene im Modellraum \mathbb{R}^3 interpretiert werden kann. Die Koeffizienten der Gleichung liefern einen Normalenvektor dieser Ebene.

Ganz so überraschend ist das Ergebnis natürlich nicht, wenn wir uns daran erinnern, dass bereits in der Mittelstufe Gleichungen des Typs

$$ax + by = c$$

zur Beschreibung von Geraden benutzt wurden. Trotzdem bestätigt diese Feststellung eindrucksvoll unsere Theorie.

Das folgende Beispiel zeigt, wie wir aus einer Koordinatengleichung einer Ebene wieder eine Punktrichtungsgleichung zurückgewinnen können.

(16.8) Beispiel

Gegeben sei die Ebene $e : 3x - 4y + 2z = 13$.

Die Gleichung von e kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$e : \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} - 13 = 0$$

Offenbar erfüllt der Punkt $A := (1; -2; 1)$ die Gleichung. Damit haben wir bereits einen Stützpunkt von e .

$\vec{u} := \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ sind gemäß Rezept (16.6) zwei linear unabhängige Richtungsvektoren von e .

Also ergibt sich eine Punktrichtungsgleichung der Ebene e wie folgt:

$$e : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Das hier am Beispiel vorgeführte Verfahren ist allgemein abgesichert. Für eine Ebene, die durch eine Koordinaten- oder eine Normalengleichung gegeben ist, können wie im Beweis zu Satz (16.5) stets ein Stützpunkt A und gemäß Beweis des Satzes (16.6) zwei linear unabhängige Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} konstruiert werden.

Wir kehren nun noch einmal zur Hesseschen Abstandsformel zurück. Nach der Einführung der Normalen- und Koordinatengleichung einer Ebene können wir die Formel, mit der der Abstand eines Raumpunktes Q zu einer Ebene e berechnet wird, in folgender Weise als Rezept formulieren:

1. Stelle die Ebene mit Hilfe einer allgemeinen Normalengleichung dar.

$$e : \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$$

2. Ersetze in dem Term der linken Gleichungsseite die Vektorvariable durch den Ortsvektor des Punktes.

$$\vec{n} \cdot \vec{Q} - \gamma$$

3. Bilde den Betrag des Termwerts.

$$|\vec{n} \cdot \vec{Q} - \gamma|$$

4. Dividiere diesen Wert durch den Betrag des Normalenvektors.

$$\frac{|\vec{n} \cdot \vec{Q} - \gamma|}{\|\vec{n}\|}$$



Die Darstellung einer Ebene mit Hilfe einer Normalen- oder Koordinatengleichung ist übrigens nicht eindeutig, weil durch Multiplikation mit einer reellen Konstanten δ eine solche Gleichung äquivalent umgeformt werden kann:

$$e : \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0 \Leftrightarrow \delta (\vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma) = 0 \Leftrightarrow (\delta \vec{n}) \cdot \vec{X} - \delta \gamma = 0$$

Durch Division durch den Betrag des Normalenvektors erhalten wir aber aus einer Normalengleichung eine Gleichung, die dadurch von allen anderen äquivalenten Gleichungen ausgezeichnet ist, dass der Betrag des verwendeten Normalenvektors den Wert 1 hat:

$$e : \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\|\vec{n}\|} (\vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\|\vec{n}\|} \vec{n}\right) \cdot \vec{X} - \frac{\gamma}{\|\vec{n}\|} = 0$$

(16.9) Definition

Hat der Normalenvektor \vec{n} in der Normalen- oder Koordinatengleichung $\vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$ einer Ebene e den Betrag 1, dann wird die Gleichung als *Hessesche Normalform der Ebenengleichung* bezeichnet.

(16.10) Beispiel

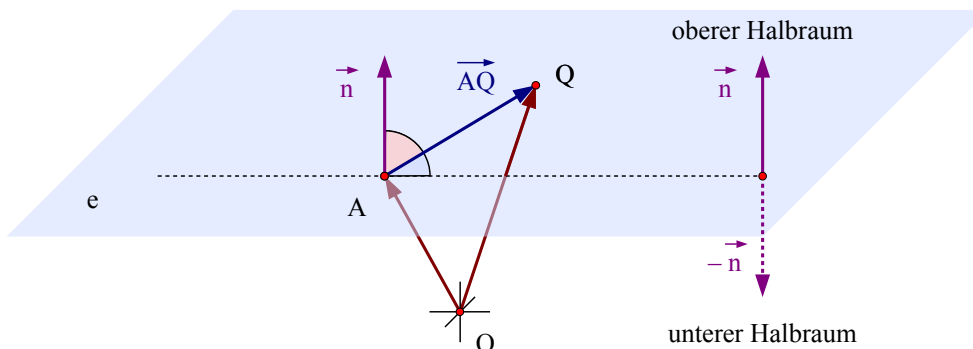
Die Ebenengleichung $e : \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} - 2 = 0$ genügt den Bedingungen der Hesseschen Normalform.

Vektoren, die den Betrag 1 aufweisen, tragen einen besonderen Namen:

(16.11) Definition

Ein Vektor \vec{n} heißt *Einheitsvektor*, wenn sein Betrag den Wert 1 hat: $\|\vec{n}\| = 1$.

Diesen Paragraphen abschließend, reflektieren wir im Modellraum unsere Vorstellung, dass eine Ebene – anders als eine Gerade – den Raum in zwei disjunkte Hälften teilt.



Es stellt sich sofort die Frage, wie die beiden Halbräume zunächst begrifflich, dann aber auch analytisch voneinander unterschieden werden können. Bei der Suche nach einem Kriterium für die Unterscheidung zwischen „oben“ und „unten“ wird schnell klar, dass eine Orientierung der Ebene benötigt wird. Diese liefert aber der gewählte Normalenvektor.

Allerdings ist der Gegenvektor eines Normalenvektors einer Ebene wiederum ein Normalenvektor der Ebene – mit entgegengesetzter Orientierung. Das bedeutet, dass mit der Wahl eines Normalenvektors willkürlich festgelegt wird, welcher Halbraum der obere und welcher der untere ist.

Es soll im Folgenden vereinbart werden, dass ein Punkt Q (wie in der Abbildung) „oberhalb“ einer Ebene liegen soll, wenn der Vektor \vec{AQ} , wobei A ein Stützpunkt der Ebene e sei, mit dem Normalenvektor einen spitzen Winkel bildet. Zur Vorbereitung der angestrebten Definition stellen wir fest:

(16.12) Bemerkung

Sei $e: \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$ eine Ebene, P ein Punkt der Ebene und Q ein Punkt, der nicht in der Ebene liegt.

Dann gilt: $\sphericalangle(\vec{n}, \vec{PQ}) < 90^\circ \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{Q} - \gamma > 0$

Beweis:

Da P ein Punkt von e ist, gilt $\vec{n} \cdot \vec{P} - \gamma = 0$, das heißt $\vec{n} \cdot \vec{P} = \gamma$.

Nun folgt der Reihe nach:

$$\vec{n} \cdot \vec{Q} - \gamma > 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{Q} - \vec{n} \cdot \vec{P} > 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{PQ} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{n} \cdot \vec{PQ}}{\|\vec{n}\| \|\vec{PQ}\|} > 0 \Leftrightarrow \cos(\sphericalangle(\vec{n}, \vec{PQ})) > 0 \Leftrightarrow \sphericalangle(\vec{n}, \vec{PQ}) < 90^\circ$$

Nun erfolgt die angestrebte Begriffsbildung:

(16.13) Definition

Gegeben sei eine Ebene durch eine Normalengleichung $e: \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$.

Wir sagen, ein Punkt Q liegt oberhalb der Ebene e, falls $\vec{n} \cdot \vec{Q} - \gamma > 0$ gilt.

Die Menge aller Punkte, die oberhalb der Ebene liegen, heißt *oberer Halbraum bezüglich der Ebene e*.

Wir sagen, ein Punkt Q liegt unterhalb der Ebene e, falls $\vec{n} \cdot \vec{Q} - \gamma < 0$ gilt.

Die Menge aller Punkte, die unterhalb der Ebene liegen, heißt *unterer Halbraum bezüglich der Ebene e*.

Die beiden Halbräume bezüglich einer Ebene sind nicht nur disjunkt; sie werden „unüberwindlich“ durch die Ebene getrennt:

(16.14) Satz

Gegeben sei eine Ebene $e: \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$ und zwei Punkte P und Q, die nicht zur Ebene gehören. Dann gilt:

- Wenn die Gerade PQ parallel zu e verläuft, gehören die Punkte P und Q demselben Halbraum an.
- Wenn P und Q verschiedenen Halbräumen angehören, dann schneidet die Gerade PQ die Ebene e in genau einem Punkt S.

Beweis:

Da P und Q keine Punkte der Ebene e sind, kann die Gerade PQ nicht in der Ebene verlaufen; sie kann nur parallel zur Ebene e liegen oder sie in genau einem Punkt schneiden.

Hieraus folgt, dass die zweite Aussage des Satzes die Kontraposition der ersten ist. Wir beweisen daher nur die erste.

Wenn die Gerade PQ parallel zur Ebene e verläuft, ist ihr kanonischer Richtungsvektor \vec{PQ} auch ein Richtungsvektor der Ebene e und damit orthogonal zu ihrem Normalenvektor \vec{n} .

Daraus folgt:

$$\vec{n} \cdot \vec{Q} - \gamma = \vec{n} \cdot (\vec{P} + \vec{PQ}) - \gamma = \vec{n} \cdot \vec{P} + \vec{n} \cdot \vec{PQ} - \gamma = \vec{n} \cdot \vec{P} + 0 - \gamma = \vec{n} \cdot \vec{P} - \gamma$$

Das heißt aber gemäß Definition (16.13), dass P und Q demselben Halbraum angehören.