Übungen zu §16

Übung 16.1

Unter einer Höhe eines Tetraeders versteht man den Abstand eines Eckpunktes von der gegenüberliegenden Seitenebene. Jedes Tetraeder hat also vier Höhen. Berechne mit der Hesseschen Abstandsformel die vier Höhen für das Tetraeder ABCD, das gegeben ist durch die Punkte

$A = (3; -2; 9)$, $B = (-1; 0; -2)$, $C = (4; -1; 0)$, $D = (2; 5; -3)$

Übung 16.2

Bestimme eine Normalengleichung der Ebene ABC und prüfe, ob sie die Punkte D und E enthält.

$A = (3; -2; 2)$, $B = (0; 4; -1)$, $C = (2; 1; 4)$, $D = (4; -4; 3)$, $E = (1; 2; 1)$

Übung 16.3

Bestimme eine Punktrichtungsgleichung der Ebene e.

(a) $e: 3x - 4y + 6z = 12$

(b) $e: 2x - 5z + 9 = 0$

Übung 16.4

Gegeben sei eine Ebene $e: \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$; $O = (0; 0; 0)$ sei der Ursprung.

Zeige, dass $|\gamma| = d\,(O\,; e) \cdot \|\vec{n}\|$ gilt.

Übung 16.5

Die Symmetrieebene e_{AB} zweier verschiedener Punkte A und B sei diejenige Ebene, die die Gerade AB als Normale besitzt und durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ verläuft.

- Bestimme jeweils die Gleichung der Symmetrieebene von A und B.
- Zeige, dass Q auf der Symmetrieebene von A und B liegt.
- Zeige, dass der Abstand von Q zu A und B gleich groß ist.

(a) $A = (2; -11; 3)$, $B = (6; -5; -1)$, $Q = (0; -6; 0)$

(b) $A = (7; 2; -6)$, $B = (-5; 8; 0)$, $Q = (8; 4; 12)$

Übung 16.6

Die Symmetrieebene e_{AB} zweier verschiedener Punkte A und B sei diejenige Ebene, die die Gerade AB als Normale besitzt und durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ verläuft [siehe auch Übung 16.5].

(a) Zeige, dass die Symmetrieebene e_{AB} zweier Punkte A und B stets durch die Gleichung $2\,\overrightarrow{AB} \cdot \vec{X} - \left(\vec{B}^2 - \vec{A}^2\right) = 0$ beschrieben werden kann.

(b) Zeige, dass jeder Punkt P von e_{AB} gleich weit von A und B entfernt ist.

Tipps:

- Stelle P mit Hilfe einer Punktrichtungsgleichung von e_{AB} dar.
- Bei den Richtungsvektoren ist nur die Kenntnis über ihre Beziehung zu $\overrightarrow{AB}$ von Belang.

(c) Zeige, dass jeder Punkt, der gleich weit von A und B entfernt ist, auf der Ebene e_{AB} liegt.

Übung 16.7

Die Symmetrieebene e_{AB} zweier verschiedener Punkte A und B sei diejenige Ebene, die die Gerade AB als Normale besitzt und durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ verläuft [siehe auch Übungen 16.5 und 16.6].

Gegeben sei die Ebene $e: 4x - 2y + 3z = -7$.

(a) Zeige, dass der Punkt $A = (-3; 6; -4)$ nicht zu e gehört.

(b) Bestimme einen Punkt B so, dass e die Symmetrieebene zu A und B ist.

Übung 16.8

Gegeben ist die Ebenenschar $e_t : tx - 3y + 2z = -2$

(a) Für welchen Parameterwert t liegt der Punkt $A = (5; 6; -4)$ auf der Ebene e_t ?

(b) Für welchen Parameterwert t hat der Abstand des Ursprungs zu e_t den Wert $\frac{2}{7}$?

Übung 16.9

Bestimme jeweils eine Normalen- und eine Punktrichtungsgleichung für diejenige Ebene e, die durch den Punkt A verläuft und die Gerade l als Normale besitzt. Ermittle den Punkt L, in dem sich l und e schneiden.

(a) $l: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $A = (3; 11; 7)$

(b) $l: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$; $A = (-6; 15; -1)$

Übung 16.10

Untersuche, welche Lage die Punkte $O = (0; 0; 0)$, $A = (4; -1; 2)$, $B = (3; -8; 0)$ und $C = (3; -5; 5)$ bezüglich der Ebene $e: \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} - 11 = 0$ einnehmen: Welche Punkte liegen unterhalb, welche oberhalb der Ebene e?

Übung 16.11

Gegeben ist eine Ebene $e: \vec{n} \cdot \vec{X} - \gamma = 0$.

Untersuche, wie die Lage des Ursprungs $O = (0; 0; 0)$ von dem Vorzeichen des Koeffizienten γ in der Ebenengleichung abhängt.