Übung 16.1

Wir berechnen für jede der drei Seitenebenen zunächst zwei Richtungsvektoren und mit deren Hilfe einen Normalenvektor.

$$ABC: \ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}; \ \vec{n}_{ABC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -47 \\ -6 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$d(D; ABC) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -7 \\ -47 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{2294}} = \frac{250}{\sqrt{2294}} \approx 5{,}2197$$

$$ABD: \ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix}; \ \vec{n}_{ABD} = \begin{pmatrix} 53 \\ -37 \\ -26 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$d(C, ABD) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 53 \\ -37 \\ -26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{4854}} = \frac{250}{\sqrt{4854}} \approx 3{,}5883$$

$$BCD: \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}; \ \vec{n}_{BCD} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 28 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$d(A, BCD) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{986}} = \frac{250}{\sqrt{986}} \approx 7{,}9616$$

$$CAD: \ \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \ \vec{n}_{CAD} = \begin{pmatrix} -51 \\ -21 \\ -8 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$d(B, CAD) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -51 \\ -21 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3106}} = \frac{250}{\sqrt{3106}} \approx 4{,}4858$$

Übung 16.2

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \ ABC: \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 39 = 0$$

$$D \in ABC \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} - 39 = 0 \Leftrightarrow 39 - 39 = 0 \quad [\text{wahr}]$$

$$E \in ABC \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 39 = 0 \Leftrightarrow 36 - 39 = 0 \quad [\text{falsch}]$$

Übung 16.3

(a) $e: \begin{pmatrix}3\\-4\\6\end{pmatrix}\cdot\vec{x} = 12$; $\vec{P} := \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}3\\-4\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} = 12$; $P \in e$

$$\begin{pmatrix}3\\-4\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix} = 0-24+24=0 \quad ; \quad \begin{pmatrix}3\\-4\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix} = -18+0+18=0$$

$$e: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}$$

(b) $e: \begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix}\cdot\vec{x} = -9$; $\vec{P} := \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} = -9$; $P \in e$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix} = 10+0-10=0 \quad ; \quad \begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0+0+0=0$$

$$e: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Übung 16.4

Gemäß der Hesseschen Abstandsformel gilt: $d(O,e) = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{O} - \gamma|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|\gamma|}{\|\vec{n}\|}$

Die Gleichung muss nur noch nach $|\gamma|$ aufgelöst werden.

Übung 16.5

(a) Sei M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$; dann gilt: $\vec{M} = \begin{pmatrix}4\\-8\\1\end{pmatrix}$. $\vec{AB} = \begin{pmatrix}4\\6\\-4\end{pmatrix}$

$$e_{AB}: \begin{pmatrix}4\\6\\-4\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\6\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-8\\1\end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix}4\\6\\-4\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + 36 = 0$$

$$Q \in e_{AB} \iff \begin{pmatrix}4\\6\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-6\\0\end{pmatrix} + 36 = 0 \iff -36+36=0 \quad [\text{wahr}]$$

$$d(Q,A) = \left\|\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+25+9} = \sqrt{38} \quad ; \quad d(Q,B) = \left\|\begin{pmatrix}6\\1\\-1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{38}$$

(b) $e_{AB}: \begin{pmatrix}-12\\6\\6\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - \begin{pmatrix}-12\\6\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix}-12\\6\\6\end{pmatrix}\cdot\vec{x} = 0$

$Q \in e_{AB} \iff \begin{pmatrix}-12\\6\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\12\end{pmatrix} = 0 \iff 0=0$ [wahr] ; $d(Q,A) = d(Q,B) = \sqrt{329}$

Übung 16.6

(a) Gemäß Übung 16.5 ist $\vec{M} := \frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B})$ der Ortsvektor eines Stützpunktes von e_{AB} und $\vec{AB}$ ein Normalenvektor.

$$e_{AB}: \quad \vec{AB}\cdot\vec{x} - \vec{AB}\cdot\left(\tfrac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B})\right) = 0$$

$$\iff \vec{AB}\cdot\vec{x} - \tfrac{1}{2}(\vec{B}-\vec{A})(\vec{A}+\vec{B}) = 0$$

$$\iff \vec{AB}\cdot\vec{x} - \tfrac{1}{2}\left(\vec{B}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} - \vec{A}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{B}\right) = 0$$

$$\iff \vec{AB}\cdot\vec{x} - \tfrac{1}{2}\left(\vec{B}^2 - \vec{A}^2\right) = 0 \quad \underset{\cdot 2}{\iff} \quad 2\vec{AB}\cdot\vec{x} - (\vec{B}^2 - \vec{A}^2) = 0$$

(b) Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei linear unabhängige Richtungsvektoren von e_{AB}. Dann ist jede Linearkombination $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ orthogonal zu $\vec{AB}$.

e_{AB} besitzt die Punktrichtungsgleichung $\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B}) + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Ist $P \in e_{AB}$, so $\exists\, \lambda_P, \mu_P \in \mathbb{R}$ mit $\vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B}) + \lambda_P\vec{u} + \mu_P\vec{v}$.

Für $\vec{w} := \lambda_P\vec{u} + \mu_P\vec{v}$ gilt $\vec{AB}\cdot\vec{w} = 0$

$$d(P,A) = \|\vec{PA}\| = \|\vec{AP}\| = \|-\vec{A} + \tfrac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B}) + \vec{w}\|$$

$$= \|-\tfrac{1}{2}\vec{A} + \tfrac{1}{2}\vec{B} + \vec{w}\| = \|\tfrac{1}{2}\vec{AB} + \vec{w}\| = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\vec{AB}+\vec{w})\cdot(\tfrac{1}{2}\vec{AB}+\vec{w})}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}\vec{AB}^2 + \vec{w}^2}$$

$$d(P,B) = \|\vec{BP}\| = \|-\tfrac{1}{2}\vec{B} + \tfrac{1}{2}\vec{A} + \vec{w}\| = \|\tfrac{1}{2}\vec{BA} + \vec{w}\| = \sqrt{\tfrac{1}{4}\vec{BA}^2 + \vec{w}^2}$$

Da $\vec{AB}^2 = \vec{BA}^2$ gilt auch $d(P,A) = d(P,B)$

(c) Sei der Punkt P gleich weit von A und B entfernt.

$$d(P,A) = d(P,B) \iff \|\vec{AP}\| = \|\vec{BP}\| \iff \vec{AP}^2 = \vec{BP}^2$$

$$\iff (-\vec{A}+\vec{P})^2 = (-\vec{B}+\vec{P})^2 \iff \vec{A}^2 - 2\vec{A}\cdot\vec{P} + \vec{P}^2 = \vec{B}^2 - 2\vec{B}\cdot\vec{P} + \vec{P}^2$$

$$\iff 2(-\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{P} + \vec{A}^2 - \vec{B}^2 = 0$$

$$\iff 2\vec{AB}\cdot\vec{P} - (\vec{B}^2 - \vec{A}^2) = 0 \iff P \in e_{AB} \quad [\text{s. Teilaufgabe (a)}]$$

Übung 16.7

(a) $A \in e \iff 4\cdot(-3) + (-2)\cdot 6 + 3\cdot(-4) = -7 \iff -36 = (-7)$ [falsch]

(b) Das Lot l durch A auf e hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-4\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-3\\6\\-4\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}\right] = -7 \iff -36 + 29\rho = -7 \iff 29\rho = 29$$

$$\iff \rho = 1$$

Der Lotfußpunkt M von A auf e ist gegeben durch

$$\vec{M} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-4\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{AM} = \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$$

Da M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist, folgt

$$\vec{B} = \vec{A} + \vec{AB} = \vec{A} + 2\vec{AM} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-4\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix}$$

Übung 16.8

(a) $A \in e_t \iff t\cdot 5 - 3\cdot 6 + 2\cdot(-4) = -2 \iff 5t = 24 \iff t = \frac{24}{5}$

(b) $d(\mathcal{O}, e_t) = \frac{2}{7} \iff \dfrac{\left|\begin{pmatrix}t\\-3\\2\end{pmatrix}\cdot\vec{\mathcal{O}} + 2\right|}{\sqrt{t^2+9+4}} = \frac{2}{7} \iff \dfrac{2}{\sqrt{t^2+13}} = \frac{2}{7}$

$$\iff 7 = \sqrt{t^2+13} \iff 49 = t^2 + 13$$

$$\iff t^2 = 36 \iff t = 6 \lor t = -6$$

Übung 16.9

(a) $e: \begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\11\\7\end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - 69 = 0$

$$e: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\11\\7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\6\\-3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}\right] - 69 = 0 \iff -29 + 49\rho - 69 = 0 \iff 49\rho = 98$$

$$\iff \rho = 2$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\7\\7\end{pmatrix}$$

(b) $e: \begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\15\\-1\end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + 118 = 0$

$e: \vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\15\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\-6\\2\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix}\right] + 118 = 0 \iff 44 + 54\rho + 118 = 0$$

$$\iff 54\rho = -162 \iff \rho = -3$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix}0\\-6\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\15\\-1\end{pmatrix}$$

<u>Übung 16.10</u>

$\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}\cdot\vec{O} - 11 = -11$; O liegt unterhalb der Ebene e.

$\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix} - 11 = -5$; A liegt unterhalb der Ebene e.

$\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}+3\\-8\\0\end{pmatrix} - 11 = 27$; B liegt oberhalb der Ebene e.

$\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\\5\end{pmatrix} - 11 = 0$; C liegt <u>auf</u> der Ebene e

<u>Übung 16.11</u>

$e: \vec{n}\cdot\vec{x} - \mu = 0$

$\vec{n}\cdot\vec{O} - \mu = -\mu < 0$, falls $\mu > 0$

Der Ursprung liegt also unterhalb der Ebene e, falls μ positiv ist.

$\vec{n}\cdot O - \mu = -\mu > 0$, falls $\mu < 0$

Der Ursprung liegt also oberhalb der Ebene e, falls μ negativ ist.

Im Falle $\mu = 0$ liegt der Ursprung auf der Ebene e.