§15 Orthogonalität und Lote auf Ebenen

Über das Skalarprodukt haben wir die Möglichkeit erhalten, die geometrische Theorie um die Relation „orthogonal" (*griech*., „rechtwinklig") zu bereichern. Als Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen dient die einschlägige Definition aus dem vorigen Paragraphen:

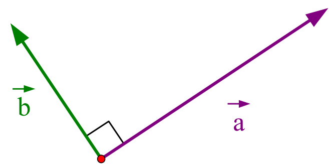
<u>(15.1) Definition</u>

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Offenbar sind zwei Vektoren immer im Sinne der Definition (15.1) orthogonal, wenn mindestens einer von ihnen der Nullvektor ist.

Sind beide Vektoren vom Nullvektor verschieden, so sind sie genau dann orthogonal, wenn der Winkel zwischen ihnen 90° beträgt (14.18).

Nach Bemerkung (14.20) müssen Vektoren linear unabhängig sein, wenn der Winkel zwischen ihnen nicht 0° oder 180° beträgt. Für den speziellen Fall von Orthogonalität wird dieser Schluss noch einmal bestätigt:



<u>(15.2) Bemerkung</u>

Sind zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal, so sind sie linear unabhängig.

Beweis:

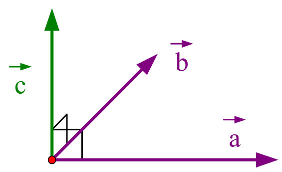
Wären die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig, gäbe es einen Skalar $\lambda\in\mathbb{R}$ mit $\vec{b}=\lambda\,\vec{a}$.

Daraus folgte $\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot(\lambda\,\vec{a})=\lambda\,(\vec{b}\cdot\vec{a})=\lambda\cdot 0=0$ und damit $\vec{b}=\vec{0}$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ müssen daher linear unabhängig sein.

Die vorangehende Bemerkung kann als Indiz dafür angesehen werden, dass das Hinzufügen orthogonaler Vektoren lineare Unabhängigkeit nicht beschädigt. Ein vom Nullvektor verschiedener Vektor $\vec{a}$ ist ja für sich genommen im Sinne des Nullvektorkriteriums linear unabhängig. Wird nun, so besagt die Bemerkung, ein zu $\vec{a}$ orthogonaler Vektor $\vec{b}$ hinzugefügt, so entsteht eine Menge $\{\vec{a},\vec{b}\}$ linear unabhängiger Vektoren. Wir gehen in diesem Gedankengang noch einen Schritt weiter:

<u>(15.3) Bemerkung</u>

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei linear unabhängige Vektoren und ist der vom Nullvektor verschiedene Vektor $\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so sind auch die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig.



Beweis:

Angenommen, die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ wären unter den gegebenen Voraussetzungen linear abhängig. Dann gäbe es Skalare $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ mit $\vec{c}=\lambda\,\vec{a}+\mu\,\vec{b}$.

Daraus folgte $\vec{c}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\lambda\,\vec{a}+\mu\,\vec{b})=\lambda\,(\vec{c}\cdot\vec{a})+\mu\,(\vec{c}\cdot\vec{b})=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0=0$ und damit $\vec{c}=\vec{0}$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ müssen daher linear unabhängig sein.

Aus den vorbereitenden Bemerkungen (15.2) und (15.3) folgt mit Korollar (10.14) eine bedeutende Erkenntnis:

<u>(15.4) Satz</u>

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei linear unabhängige Vektoren und ist der vom Nullvektor verschiedene Vektor $\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so bilden die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Basis des Modellraums $\mathbb{R}^3$.

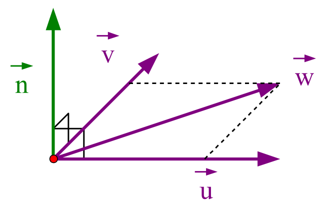
Insbesondere bilden drei **paarweise orthogonale** Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Basis des Modellraums $\mathbb{R}^3$.

Aus Satz (15.4) lassen sich für den Modellraum $\mathbb{R}^3$ zwei Folgerungen mit zentraler Bedeutung ableiten. Diese werden im weiteren Verlauf des Paragraphen noch eine zweite Fassung in den Sätzen (15.12) und (15.13) erhalten.

(15.5) 1. Orthogonalitätstheorem

Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ und ein vom Nullvektor verschiedener Vektor $\vec{n}$, der orthogonal zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist. Dann gilt:

Ein Vektor $\vec{w}$ ist genau dann orthogonal zu $\vec{n}$, wenn er eine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist.



Beweis:

„ ⇒ “

Gelte also $\vec{n}\cdot\vec{w}=0$.

Weil die drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{n}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, kann der Vektor $\vec{w}$ durch diese drei Vektoren linear kombiniert werden. Es gibt also Skalare $\lambda,\mu,\rho\in\mathbb{R}$ mit $\vec{w}=\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}+\rho\,\vec{n}$.

Damit folgt nach den Rechenregeln für das Skalarprodukt

$$0=\vec{n}\cdot\vec{w}=\vec{n}\cdot(\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}+\rho\,\vec{n})=\vec{n}\cdot(\lambda\,\vec{u})+\vec{n}\cdot(\mu\,\vec{v})+\vec{n}\,(\rho\,\vec{n})=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0+\rho\,\vec{n}^2=\rho\,\|\vec{n}\|^2$$

Weil $\vec{n}$ vom Nullvektor verschieden ist, muss zwangsläufig $\rho = 0$ und damit $\vec{w}=\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}$ gelten.

„ ⇐ “

Sei nun umgekehrt vorausgesetzt, dass $\vec{w}$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist.

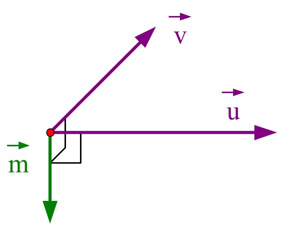
Es gibt also Skalare $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ mit $\vec{w}=\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}$.

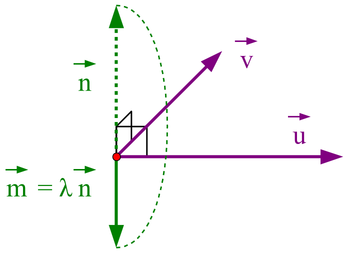
Dann folgt sofort $\vec{n}\cdot\vec{w}=\vec{n}\cdot(\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v})=\lambda\,(\vec{n}\cdot\vec{u})+\mu\,(\vec{n}\cdot\vec{v})=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0=0$

(15.6) 2. Orthogonalitätstheorem

Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ und ein vom Nullvektor verschiedener Vektor $\vec{n}$, der orthogonal zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist. Dann gilt:

Ein Vektor $\vec{m}$ ist genau dann auch orthogonal zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$, wenn $\vec{m}$ von $\vec{n}$ linear abhängig ist.





Beweis:

„ ⇒ “

Gelte also $\vec{m}\cdot\vec{u}=0$ und $\vec{m}\cdot\vec{v}=0$.

Weil die drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{n}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, kann der Vektor $\vec{m}$ durch diese drei Vektoren linear kombiniert werden. Es gibt also Skalare $\lambda,\mu,\rho\in\mathbb{R}$ mit $\vec{m}=\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}+\rho\,\vec{n}$.

Damit folgt nach den Rechenregeln für das Skalarprodukt einerseits

$$\begin{aligned}\vec{m}\cdot\vec{m}&=\vec{m}\cdot(\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}+\rho\,\vec{n})=\lambda\,(\vec{m}\cdot\vec{u})+\mu\,(\vec{m}\cdot\vec{v})+\rho\,(\vec{m}\cdot\vec{n})=0+0+\rho\,(\vec{m}\cdot\vec{n})=\rho\,(\vec{m}\cdot\vec{n})\\&=\rho\,(\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}+\rho\,\vec{n})\cdot\vec{n}=\rho\lambda\,(\vec{u}\cdot\vec{n})+\rho\mu\,(\vec{v}\cdot\vec{n})+\rho^2\,(\vec{n}\cdot\vec{n})=0+0+\rho^2\,\vec{n}^2=\rho^2\,\vec{n}^2\end{aligned}$$

und andererseits

$$\vec{m}\cdot\vec{m} = [(\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v})+\rho\,\vec{n}]\cdot[(\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v})+\rho\,\vec{n}] = (\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v})^2 + 2\,(\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v})\cdot(\rho\,\vec{n}) + (\rho\,\vec{n})^2$$
$$= (\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v})^2 + 2\lambda\rho\,(\vec{u}\cdot\vec{n}) + 2\mu\rho\,(\vec{v}\cdot\vec{n}) + \rho^2\,\vec{n}^2 = (\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v})^2 + 0 + 0 + \rho^2\,\vec{n}^2$$

Aus dem Vergleich der Ergebnisse folgt, dass $(\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v})^2 = 0$ und daher $\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v} = \vec{0}$ gelten muss.

Da $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind, folgt mit dem Nullvektorkriterium $\lambda = 0$ und $\mu = 0$ und damit, wie behauptet, $\vec{m} = 0\,\vec{u} + 0\,\vec{v} + \rho\,\vec{n} = \rho\,\vec{n}$.

„ $\Leftarrow$ “

Sei nun umgekehrt vorausgesetzt, dass $\vec{m}$ ein Vielfaches des Vektors $\vec{n}$ ist: $\vec{m} = \rho\,\vec{n}$ mit $\rho \in \mathbb{R}$.

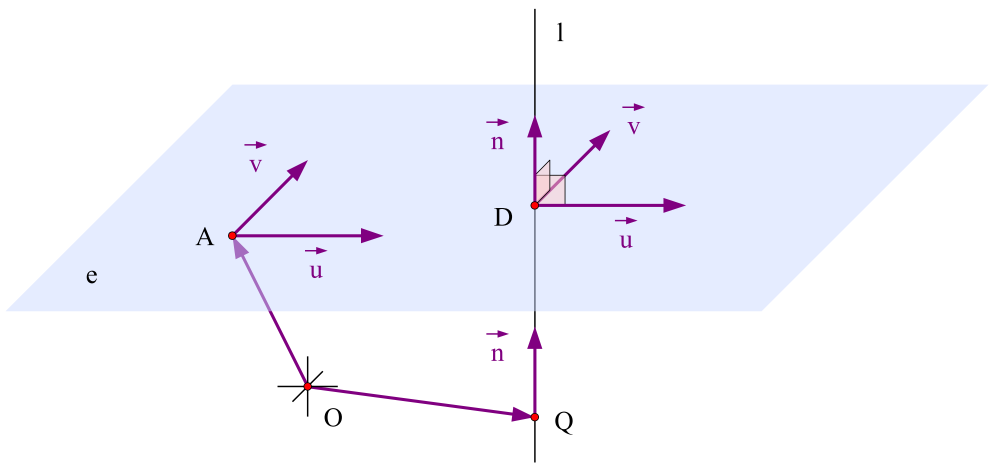
Dann folgt sofort $\vec{m}\cdot\vec{u} = (\rho\,\vec{n})\cdot\vec{u} = \rho\,(\vec{n}\cdot\vec{u}) = \rho\cdot 0 = 0$ und genauso $\vec{m}\cdot\vec{v} = 0$.

Die Stärke der beiden Orthogonalitätstheoreme liegt darin, dass sie die Mengen der Vektoren exakt beschreiben, die zu einem vom Nullvektor verschiedenen Vektor orthogonal sind (Satz 1) beziehungsweise zu zwei linear unabhängigen Vektoren orthogonal sind (Satz 2). Diese Beschreibungen gelten natürlich nur im Modellraum $\mathbb{R}^3$, weil sie gemäß Satz (15.4) auf dessen Dreidimensionalität beruhen.

- Die Vektoren, die zu einem vom Nullvektor verschiedenen Vektor orthogonal sind, bilden einen zweidimensionalen Untervektorraum des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$.
- Die Vektoren, die zu zwei linear unabhängigen Vektoren orthogonal sind, bilden einen eindimensionalen Untervektorraum des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$.

Die rückwärtigen Schlussrichtungen („ $\Leftarrow$ “) sind in beiden Sätzen weniger aufregend. Ihre Beweise waren recht einfach zu führen, weil Orthogonalität beim Bilden von Linearkombinationen offensichtlich erhalten bleibt.

Nach diesen grundlegenden Vorbereitungen werden im Modellraum orthogonale Strukturen erklärt. Am einfachsten geht die Einführung der Beziehung „senkrecht“ zwischen Gerade und Ebene von der Hand.



<u>(15.7) Definition</u>

Gegeben sei eine Ebene e und eine Gerade l.

Wir sagen: *„Die Gerade l steht senkrecht auf der Ebene e“*

oder: *„Die Gerade l ist eine Normale der Ebene e“*

oder: *„Die Gerade l ist ein Lot zur (auf die) Ebene e“*

und schreiben „ $l \perp e$ “, falls jeder Richtungsvektor von l orthogonal zu jedem Richtungsvektor von e ist.

Das Definitionskriterium ist natürlich unhandlich, weil unendlich viele Objekte in die Prüfung einbezogen werden müssen. Der folgende Satz vereinfacht die Sache.

(15.8) Satz

Sei $e : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$ eine Ebene und $l : \vec{X} = \vec{Q} + \rho\,\vec{n}$ eine Gerade.

Dann gilt:

Die Gerade l steht genau dann (im Sinne der Definition (15.7)) senkrecht auf der Ebene e, falls ihr Richtungsvektor $\vec{n}$ orthogonal zu den (linear unabhängigen) Richtungsvektoren der Ebene $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist.

Beweis:

„$\Rightarrow$“:

Diese Beweisrichtung ist trivial, weil $\vec{n}$ ein spezieller Richtungsvektor von l ist und $\vec{u}$ und $\vec{v}$ spezielle Richtungsvektoren von e sind.

„$\Leftarrow$“:

Sei ein $\vec{m}$ Richtungsvektor von l, und $\vec{w}$ ein Richtungsvektor von e.

Dann gibt es Skalare $\rho, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{m} = \rho\,\vec{n}$ und $\vec{w} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$.

Damit folgt:

$$\vec{m} \cdot \vec{w} = (\rho\,\vec{n}) \cdot (\lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}) = \rho\lambda\,(\vec{n} \cdot \vec{u}) + \rho\mu\,(\vec{n} \cdot \vec{v}) = \rho\lambda \cdot 0 + \rho\mu \cdot 0 = 0 + 0 = 0\,.$$

Unsere Anschauung sagt uns, dass eine Gerade die senkrecht auf einer Ebene steht, diese in genau einem Punkt durchstoßen muss. Mit Hilfe des Satzes (15.8) ist der Nachweis einfach:

(15.9) Bemerkung

Steht eine Gerade l senkrecht auf einer Ebene e, so schneidet sie die Ebene e in genau einem Punkt.

Beweis:

Seien $\vec{n}$ ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor der Geraden l sowie $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene e.

Da die Gerade l senkrecht auf der Ebene e stehen soll, muss der Vektor $\vec{n}$ orthogonal zu den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sein. Gemäß Bemerkung (15.3) sind die drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{n}$ linear unabhängig.

Dem Analyse-Raster für die Lagebeziehungen von Gerade und Ebene zufolge schneidet daher die Gerade l die Ebene e in genau einem Punkt.

Nach Formulierung und Beweis der Orthogonalitätstheoreme hatten wir angemerkt, dass Orthogonalität beim Bilden von Linearkombinationen erhalten bleibt. Das soll heißen, dass ein Vektor, der orthogonal zu zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren einer Ebene ist, orthogonal zu allen Linearkombinationen dieser beiden Richtungsvektoren und damit sofort orthogonal zu allen Richtungsvektoren der Ebene sein muss. Dieser Gedanke animiert zu folgender Begriffsbildung:

(15.10) Definiton

Gegeben sei eine Ebene.

Ein Vektor heißt *Normalenvektor der Ebene*, wenn er orthogonal zu allen Richtungsvektoren der Ebene ist.

Beachte, dass der Nullvektor immer auch ein Normalenvektor einer gegebenen Ebene ist. Soll der Nullvektor nicht in Betracht gezogen werden, ist er ausdrücklich auszuschließen. Gleiches gilt ja auch für den Nullvektor als Richtungsvektor einer Geraden oder Ebenen.

Wie in der Vorbereitung zur Definition (15.10) angedeutet, kann das Definitionskriterium abgeschwächt werden:

(15.11) Satz („Hinreichendes Kriterium für Normalenvektoren“)

Sei e eine Ebene sowie $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei linear unabhängige Richtungsvektoren von e.

Ein Vektor $\vec{n}$ ist genau dann ein Normalenvektor der Ebene, wenn er orthogonal zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist.

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “:

Diese Schlussrichtung ist trivial. Wenn $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene e ist, ist $\vec{n}$ orthogonal zu allen Richtungsvektoren der Ebene, insbesondere auch zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

„ $\Leftarrow$ “:

Wir setzen nun voraus, dass der Vektor $\vec{n}$ orthogonal zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist.

Sei $\vec{w}$ irgendein Richtungsvektor der Ebene e. Dann ist $\vec{w}$ gemäß Bemerkung (9.6) eine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Aufgrund des 1. Orthogonalitätstheorems ist deshalb der Vektor $\vec{w}$ orthogonal zum Vektor $\vec{n}$.

Weil der Richtungsvektor $\vec{w}$ beliebig wählbar ist, ist der Vektor $\vec{n}$ orthogonal zu allen Richtungsvektoren der Ebene e und damit ein Normalenvektor von e im Sinne der Definition (15.10).

Mit zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren einer Ebene können wir also prüfen, ob ein gegebener Vektor ein Normalenvektor dieser Ebene ist.

Es folgt nun, wie angekündigt, eine zweite Fassung der beiden zentralen Orthogonalitätstheoreme. Diese Formulierungen fokussieren die Beziehungen, die zwischen Normalen- und Richtungsvektoren einer Ebene bestehen.

(15.12) 1. Normalenvektorsatz für Ebenen

Sei e eine Ebene und $\vec{n}$ ein vom Nullvektor verschiedener Normalenvektor von e. Dann gilt:

Ein Vektor $\vec{w}$ ist genau dann orthogonal zu $\vec{n}$, wenn $\vec{w}$ ein Richtungsvektor der Ebene ist.

Beweis:

Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene e.

Dann ist der Vektor $\vec{n}$ als Normalenvektor der Ebene sowohl orthogonal zu $\vec{u}$ als auch orthogonal zu $\vec{v}$.

Damit folgt:

Der Vektor $\vec{w}$ ist orthogonal zum Vektor $\vec{n}$

$\Leftrightarrow$ $\vec{w}$ ist eine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ [1. Orthogonalitätstheorem (15.5)]

$\Leftrightarrow$ $\vec{w}$ ist ein Richtungsvektor der Ebene e [Bemerkung (9.6)]

Der 1. Normalenvektorsatz, der substantiell nichts anderes als das 1. Orthogonalitätstheorem ist, verschafft uns Klarheit über die Vektoren, die orthogonal zu einem Normalenvektor einer Ebene sind.

(15.13) 2. Normalenvektorsatz für Ebenen

Sei e eine Ebene und $\vec{n}$ ein vom Nullvektor verschiedener Normalenvektor von e. Dann gilt:

Ein Vektor $\vec{m}$ ist genau dann ebenfalls ein Normalenvektor von e, wenn $\vec{n}$ und $\vec{m}$ linear abhängig sind.

Beweis:

Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene e.

Dann ist der Vektor $\vec{n}$ als Normalenvektor der Ebene sowohl orthogonal zu $\vec{u}$ als auch orthogonal zu $\vec{v}$.

Damit folgt:

$\vec{m}$ ist ein Normalenvektor von e

$\Leftrightarrow$ $\vec{m}$ ist orthogonal zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ [Hinreichendes Kriterium (15.11)]

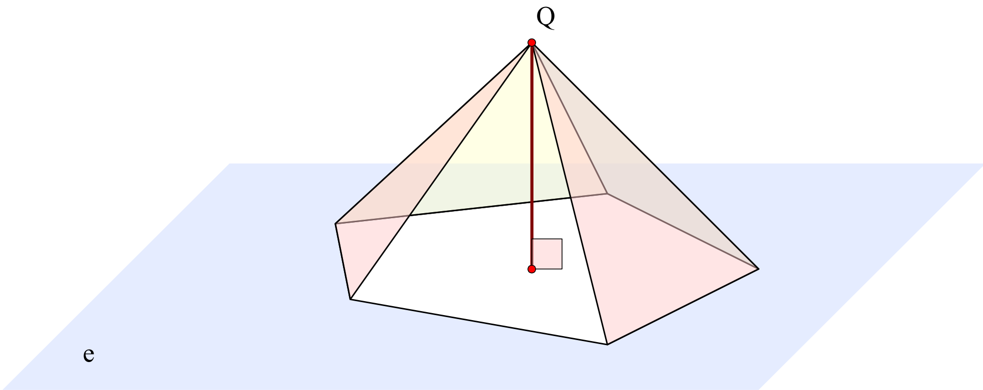
$\Leftrightarrow$ $\vec{m}$ ist linear abhängig von $\vec{n}$ [2. Orthogonalitätstheorem (15.6)]

Wie auch dieser Beweis zeigt, ist der 2. Normalenvektorsatz im Kern nichts anderes als das 2. Orthogonalitätstheorem; er zeigt uns, dass die Menge der Normalenvektoren einer Ebene überschaubar ist. Die Normalenvektoren einer Ebene bilden genauso einen eindimensionalen Untervektorraum des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ wie die Richtungsvektoren einer Geraden.

Unter Verwendung des neuen Begriffs „Normalenvektor“ formulieren wir auch den Satz (15.8) um. Die folgende Bemerkung hat eine große praktischer Bedeutung; sie macht übrigens nachträglich klar, warum „Normalenvektor“ eine zur Definition (15.7) passende Bezeichnung ist.

> <u>(15.14) Bemerkung</u>
>
> Sei $e: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$ eine Ebene und $l: \vec{X} = \vec{Q} + \rho\,\vec{n}$ eine Gerade. Dann gilt:
>
> Die Gerade l steht genau dann senkrecht auf der Ebene e, falls ihr Richtungsvektor $\vec{n}$ ein Normalenvektor von e ist.

Offenbar liegt die große Bedeutung orthogonaler Anordnungen in der Entfernungsmessung. Sei es, dass die Höhe eines Tetraeders, der Flächeninhalt eines Dreiecks, das Volumen eines Prismas oder schlicht der Abstand eines Punktes von einer Ebene bestimmt werden soll, immer werden in der euklidischen Geometrie Lote gefällt, Senkrechten errichtet, Normalen betrachtet.



Dabei wird in der naiven Geometrie nie an der Existenz der Lotes gezweifelt und meistens seine Eindeutigkeit vorausgesetzt. Im Rahmen des Aufbaus einer analytischen Theorie, ist aber genau das zu überprüfen!

Gibt es also zu einer Ebene und einem Punkt Q stets genau eine Normale von e, die durch Q verläuft? Versuchen wir zunächst die Existenz nachzuweisen.

Da mit Q ein Stützpunkt gegeben ist, muß nach Satz (15.8) „nur“ ein Vektor gefunden werden, der orthogonal zu zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren der gegebenen Ebene e ist.

> <u>(15.15) Satz</u>
>
> Sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren, so ist der Vektor $\vec{n} := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$ sowohl orthogonal zum Vektor $\vec{u}$ als auch orthogonal zum Vektor $\vec{v}$.

Der Beweis erfolgt durch simples Nachrechnen (Übungsaufgabe!). Der Leser wird sich natürlich fragen, wie man ohne Hinweis die kompliziert aussehenden Koordinaten des Vektors $\vec{n}$ erhält. Die Antwort ist überraschend einfach.

Betrachte das Gleichungssystem

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \quad \wedge \quad \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \;,$$

das ausgeschrieben folgende Gestalt hat:

$$n_1 u_1 + n_2 u_2 + n_3 u_3 = 0 \quad \wedge \quad n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3 = 0$$

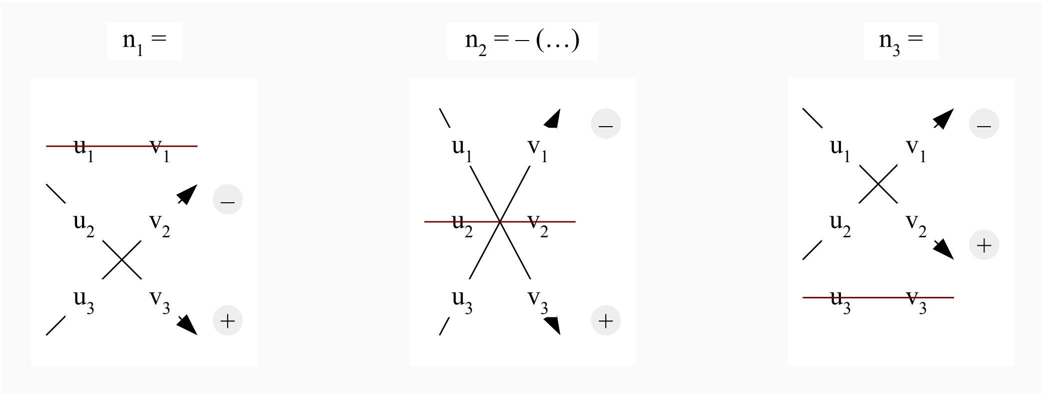
Da für die Bestimmung der drei Koordinaten von $\vec{n}$ nur zwei Gleichungen zur Verfügung stehen, wird das System so umgeformt, dass zwei der Variablen, beispielsweise n_2 und n_3, durch die dritte, das ist dann n_1, ausgedrückt werden. Für diese kann irgendein Wert frei gewählt werden. Die im Satz angegebene Wahl für n_1 vermeidet Brüche in der Darstellung von n_2 und n_3 .

(15.16) Definition

Für je zwei Vektoren $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ heißt der Vektor $\vec{u}\times\vec{v}:=\begin{pmatrix}u_2\,v_3-u_3\,v_2\\-(u_1\,v_3-u_3\,v_1)\\u_1\,v_2-u_2\,v_1\end{pmatrix}$ Vektorprodukt der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

[Der Ausdruck $\vec{u}\times\vec{v}$ wird „Vektor u Kreuz Vektor v“ gelesen.]

Die scheinbar komplizierten Koordinatenformeln für das Vektorprodukt verlieren ihre Schrecken, wenn das Rechenschema für Determinanten wiedererkannt wird:



(1) Streiche die zum Index gehörende Zeile
(2) Multipliziere diagonal
(3) Subtrahiere die Produkte

Das Vektorprodukt wird uns in einem der folgenden Paragraphen eingehender beschäftigen. An dieser Stelle genügt für unsere Zwecke die folgende Feststellung.

(15.17) Satz

Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei Vektoren.

Ihr Vektorprodukt $\vec{u}\times\vec{v}$ ist genau dann der Nullvektor, wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind.

Beweis:

„ $\Leftarrow$ “:

Seien die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig

Dann gibt es o.B.d.A. einen Skalar $\lambda\in\mathbb{R}$ so dass $\vec{v}=\lambda\,\vec{u}$ gilt. Es folgt:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}u_2\,(\lambda u_3)-u_3\,(\lambda u_2)\\-(u_1\,(\lambda u_3)-u_3\,(\lambda u_1))\\u_1\,(\lambda u_2)-u_2\,(\lambda u_1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$$

„ $\Rightarrow$ “:

Sei nun umgekehrt $\vec{u}\times\vec{v}$ der Nullvektor.

Ist einer der beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Nullvektor, ist offenbar nichts zu zeigen. Wir nehmen also an, dass $\vec{v}$ nicht der Nullvektor ist. Dann folgt, falls alle Koordinaten von $\vec{v}$ von 0 verschieden sind:

$$\left\{\begin{matrix}u_2\,v_3-u_3\,v_2=0\\-(u_1\,v_3-u_3\,v_1)=0\\u_1\,v_2-u_2\,v_1=0\end{matrix}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{matrix}u_2\,v_3=u_3\,v_2\\u_1\,v_3=u_3\,v_1\\u_1\,v_2=u_2\,v_1\end{matrix}\right\} \quad\Rightarrow\quad \frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}$$

Definiert man den gemeinsamen Koordinatenquotienten als λ, so gilt offenbar $\vec{u}=\lambda\,\vec{v}$.

Ist eine Koordinate von $\vec{v}$, beispielsweise v_1, gleich 0, muss es eine zweite geben, beispielsweise v_2, die von 0 verschieden ist, weil $\vec{v}$ nicht der Nullvektor sein soll.

Aus der entsprechenden Gleichung, die beide Koordinaten involviert (hier: $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$), folgt sofort, dass die entsprechende Koordinate von $\vec{u}$ (hier: u_1) auch gleich 0 sein muss.

Deshalb können unter der Voraussetzung, dass $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ gilt, Koordinaten von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nur gemeinsam verschwinden. Diese können aber oben bei der Bildung der Quotienten weggelassen werden. In jedem Fall gewährleistet die Gleichheit der Quotienten die lineare Abhängigkeit. Das war zu zeigen.

Aus dem Satz (15.17) folgt unter anderem, dass die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{u} \times \vec{v}$ stets eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, wenn die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind.

Betrachten wir zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ einer Ebene, dann sichert das Vektorprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$ die Existenz eines vom Nullvektor verschiedenen Normalenvektors. Dieser oder ein geeignetes Vielfaches von ihm kann als Richtungsvektor für Normalen der Ebene e verwendet werden. Damit ist das Existenzproblem gelöst:

<u>(15.18) Satz („Existenz des Lots“)</u>

Sei $e: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$ eine Ebene und Q ein Punkt des Modellraumes.

Dann ist $l: \vec{X} = \vec{Q} + \rho\,\vec{u} \times \vec{v}$ eine Normale zu e, die durch Q verläuft.

Nach diesem theoretischen Erfolg wandert unser Fokus auf das Eindeutigkeitsproblem. Fraglich ist, ob es eventuell mehrere Normalen der Ebene e gibt, die durch einen vorgegebenen Punkt Q verlaufen.

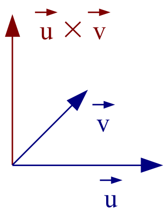
Wir wissen, dass zwei Geraden, die durch denselben Punkt Q verlaufen, nur dann verschieden sind, wenn sie linear unabhängige Richtungsvektoren besitzen. Daher stellt sich die Frage, ob es zwei linear unabhängige Normalenvektoren einer Ebene geben kann.

Diese Frage wurde aber bereits durch den 2. Normalenvektorsatz (15.13) beantwortet. Unter Verwendung des Begriffs „Vektorprodukt“ können wir das 2. Orthogonalitätstheorem, das den Kern des 2. Normalenvektorsatzes bildet, auch wie folgt ausdrücken:

<u>(15.19) Bemerkung</u>

Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei linear unabhängige Vektoren im Modellraum. Dann gilt:

Ein Vektor $\vec{n}$ ist genau dann orthogonal zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$, wenn er von $\vec{u} \times \vec{v}$ linear abhängig ist.



Außerdem erhalten wir natürlich das gewünschte Resultat:

<u>(15.20) Satz („Eindeutigkeit des Lots“)</u>

Sei $e: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$ eine Ebene, Q ein Punkt des Modellraumes und $\vec{n}$ ein vom Nullvektor verschiedener Normalenvektor von e.

Dann ist $l: \vec{X} = \vec{Q} + \rho\,\vec{n}$ die einzige Gerade, die senkrecht auf der Ebene e steht und durch Q verläuft.

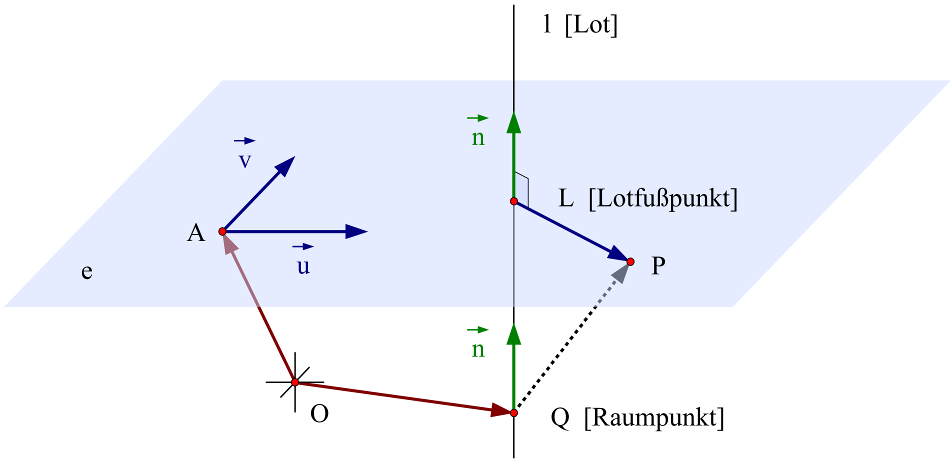
Zu einer Ebene e und einem Punkt Q des Modellraumes gibt es also immer genau eine Gerade l, die durch den Punkt Q verläuft und senkrecht auf der Ebene e steht. Dieser Sachverhalt berechtigt zur Einführung neuer Sprechweisen und neuer Begriffe.

<u>(15.21) Definition</u>

Sei $e: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$ eine Ebene, Q ein Punkt des Modellraumes und $\vec{n}$ ein vom Nullvektor verschiedener Normalenvektor von e.

Dann heißt die Gerade $l: \vec{X} = \vec{Q} + \rho\,\vec{n}$ *Normale der Ebene e durch den Punkt Q* oder auch *Lot vom Punkt Q auf die Ebene e*.

Der durch gemäß Bemerkung (15.9) eindeutig bestimmte Punkt L, in dem das Lot vom Punkt Q auf die Ebene e diese Ebene e durchstößt, heißt *Lotfußpunkt von Q auf der Ebene e*.



Unsere Anschauung sagt uns, dass der Lotfußpunkt L eines Punktes Q auf einer Ebene e derjenige Ebenenpunkt ist, der zum Punkt Q den geringsten Abstand hat. Tatsächlich gilt:

<u>(15.22) Satz</u>

Sei e eine Ebene, Q ein Punkt des Modellraumes und L der Lotfußpunkt von Q auf e.
Dann gilt für jeden von Q verschiedenen Punkt P der Ebene e $d(Q,P) > d(Q,L)$.

Beweis:

Ist L der Lotfußpunkt von Q auf e, so ist die Gerade QL eine Normale und $\overrightarrow{QL}$ ein Normalenvektor von e.
Ist P irgendein Punkt der Ebene e, so ist $\overrightarrow{LP}$ ein Richtungsvektor von e und daher orthogonal zu $\overrightarrow{QL}$.
Mit der Beziehung $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QL} + \overrightarrow{LP}$ berechnen wir nun $d(Q,P)^2$:

$$d(Q,P)^2 = \overrightarrow{QP}^2 = (\overrightarrow{QL} + \overrightarrow{LP})^2 = \overrightarrow{QL}^2 + 2\,\overrightarrow{QL}\cdot\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{LP}^2 = d(Q,L)^2 + d(L,P)^2 > d(Q,L)^2$$

Daraus ergibt sich die gewünschte Ungleichung durch Wurzelziehen.

Der Satz (15.22) legitimiert die nächste Begriffsbildung:

<u>(15.23) Definition</u>

Sei e eine Ebene, Q ein Punkt des Modellraumes und L der Lotfußpunkt von Q auf e.
Die Zahl $d(Q,e) := d(Q,L) = \|\overrightarrow{QL}\| = d(L,Q) = \|\overrightarrow{LQ}\|$ heißt *Abstand vom Punkt Q zur Ebene e*.

Es ist zu beachten, dass nirgendwo die Voraussetzung gemacht wurde, dass Q nicht auf e liegen darf. Offenbar ist das Lot auch im Fall $Q \in e$ wohldefiniert. Q stimmt dann mit seinem Lotfußpunkt überein, und der Abstand von Q zu e ist gleich 0.

<u>(15.24) Bemerkung</u>

Sei e eine Ebene und Q ein Punkt.
Dann gilt: $d(Q,e) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q \in e$.

Der nächste Paragraph wird näher auf die Entfernungsmessung eingehen. Die Definition des Abstands „Punkt-Ebene“ wurde vorweggenommen, um zu verdeutlichen, dass sie voraussetzt, dass ein Raumpunkt immer auf eindeutige Weise (mit Hilfe einer Normalen) auf eine Ebene orthogonal projiziert werden kann.

Im Hinblick auf die Übungen zu diesem Paragraphen zeigen wir nachfolgend anhand eines Beispiels, wie Lotfußpunkte mit wenig Aufwand berechnet werden können.

(15.25) Beispiel (Berechnung eines Lotfußpunktes)

Berechne den Lotfußpunkt des Punktes Q = (21; 9; 19) auf der Ebene $e: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene e und daher $l: \vec{X} = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 19 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 33 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ eine Gleichung des Lotes vom Punkt Q auf e.

Der Lotfußpunkt L von Q auf e ist der Schnittpunkt des Lotes l mit e. Für diesen muss es $\lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}$ geben mit der Eigenschaft $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 19 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 33 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

Diese Vektorgleichung, die drei Parameter enthält, können wir auf elegante Weise in eine überschaubare lineare Gleichung überführen, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung das Skalarprodukt mit dem Normalenvektor bilden.

Dabei werden die beiden Parameter λ und μ eliminiert, weil der Normalenvektor orthogonal zu beiden Richtungsvektoren der Ebene ist:

$$\begin{pmatrix} 33 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 19 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 33 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -69 = 717 + 1179\rho \quad \Leftrightarrow \quad -786 = 1179\rho \quad \Leftrightarrow \quad \rho = -\frac{786}{1179} = -\frac{262}{393} = -\frac{2}{3}$$

In die Gleichung des Lotes eingesetzt, erhalten wir die Koordinaten des Lotfußpunktes L von Q auf E:

$$\vec{L} := \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 19 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 33 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -22 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Die Produktbildung mit dem Normalenvektor ist keine Äquivalenzumformung, weil offensichtlich aus der sich ergebenden linearen Gleichung nicht auf die Vektorgleichung zurückgeschlossen werden kann.

Eigentlich müsste daher die Probe $L \in e$ durchgeführt werden; diese wird aber aus logischen Gründen garantiert zu einem positiven Ergebnis führen:

Der Richtungsvektor des Lotes ist per Konstruktion linear unabhängig von den Richtungsvektoren der Ebene.

Also ist die Existenz eines gemeinsamen Punktes L vom Lot l und der Ebene e gesichert.

Dieser gemeinsame Punkt L wird durch genau einen Parameterwert ρ über die Geradengleichung des Lotes l erfasst.

Die durch die Skalarmultiplikation ausgeführte Implikation vergrößert möglicherweise, verkleinert aber keinesfalls die Lösungsmenge für den Parameter ρ.

Da die lineare Gleichung nur eine Lösung abwirft, muss diese diejenige sein, die die anfängliche Schnittpunktgleichung löst.

Kurzum, eine Probe ist überflüssig.