Übungen zu §15

<u>Übung 15.1</u>

Bestimme mit dem Ansatz $\vec{n}\cdot\vec{u}=0 \;\wedge\; \vec{n}\cdot\vec{v}=0$, das heißt, ohne Verwendung des Vektorprodukts, einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$, der orthogonal zu den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist.

(a) $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$ (b) $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\-4\\7\end{pmatrix}$ (c) $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\3\\-5\end{pmatrix}$ (d) $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$

<u>Übung 15.2</u>

(a) Berechne zu den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die in den Teilaufgaben der Übung 15.1 gegeben sind, jeweils das Vektorprodukt $\vec{u}\times\vec{v}$.

(b) Zeige, dass die in Übung 15.1 gefundenen Lösungen linear abhängig vom Vektorprodukt $\vec{u}\times\vec{v}$ sind.

<u>Übung 15.3</u>

Berechne das Vektorprodukt $\vec{u}\times\vec{v}$ der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ und erkläre das Ergebnis.

(a) $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix}$ (b) $\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}-6\\3\\-9\end{pmatrix}$

<u>Übung 15.4</u>

Seien $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ drei linear unabhängige Vektoren.
Erläutere, warum es außer dem Nullvektor keinen weiteren Vektor gibt, der orthogonal zu $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist.

<u>Übung 15.5</u>

Zeige, dass die Gerade $l:\vec{X}=\vec{Q}+\rho\,\vec{n}$ eine Normale der Ebene $e:\vec{X}=\vec{A}+\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}$ ist.
Bestimme den Durchstoßpunkt L von l und e.

(a) $l:\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}+\rho\begin{pmatrix}4\\-4\\5\end{pmatrix}$ $\quad e:\vec{X}=\begin{pmatrix}-3\\-12\\13\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\9\\4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}4\\-1\\-4\end{pmatrix}$

(b) $l:\vec{X}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}+\rho\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}$ $\quad e:\vec{X}=\begin{pmatrix}-7\\8\\-9\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Hinweis: Verwende das im Beispiel (15.25) demonstrierte Verfahren, mit dem die vektorielle Schnittpunktgleichung in eine lineare Gleichung überführt werden kann.

<u>Übung 15.6</u>

Gegeben ist die Ebene ABC mit A = (–2; 0; 3), B = (0; 1; 5), C = (–1; –2; 4). Bestimme für den Punkt Q

- die Gleichung des Lots l von Q auf e,
- die Koordinaten des Lotfußpunkts L (Beachte den Hinweis zu Übung 15.5!) und
- den Abstand von Q zu e.

(a) Q = (8; 5; 3) (b) Q = (–16; 3; 9) (c) Q = (–3; –8; 2)

Übung 15.7

Gegeben sind die Punkte A = (4; –1; 3), B = (7; –2; 3), C = (4; 1; –2), S = (15; 14; 4).
Berechne die Höhe der Spitze S des Tetraeders ABCS über der Dreiecksebene ABC.

Übung 15.8

Zeige, dass durch die Punkte A, B, C eine Ebene gegeben ist.
Ermittle die Parameter $t \in \mathbb{R}$, für die die Gerade g_t eine Normale von ABC ist.
Bestimme für diese Normalen g_t jeweils den Punkt D, in dem sie die Ebene ABC durchstoßen.

(a) A = (–1; 3; –7), B = (1; 2; –2), C = (3; –2; –6) $\quad g_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ t \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 4 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) A = (4; 1; 5), B = (6; 1; 2), C = (5; 6; 4) $\quad g_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2t \\ t \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -3 \\ t \\ 2t \end{pmatrix}$