Übung 15.1

(a) (1) $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \iff 2n_1 + 0 \cdot n_2 + 0 \cdot n_3 = 0 \iff n_1 = 0$

(2) $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \iff 0 \cdot n_1 + (-3) \cdot n_2 + 0 \cdot n_3 = 0 \iff n_2 = 0$

n_3 kann frei gewählt werden. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) (1) $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \iff 3n_1 - 2n_3 = 0 \iff n_1 = \frac{2}{3} n_3$

(2) $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \iff -4n_2 + 7n_3 = 0 \iff n_2 = \frac{7}{4} n_3$

$n_3 := 12$ sorgt für eine bruchfreie Darstellung von $\vec{n}$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix}$

(c) (1) $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \iff 3n_1 - n_2 + 4n_3 = 0$

(2) $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \iff 3n_2 - 5n_3 = 0 \iff n_2 = \frac{5}{3} n_3$ (3)

(3)→(1): $3n_1 - \frac{5}{3} n_3 + 4n_3 = 0 \iff 3n_1 + \frac{7}{3} n_3 \iff n_1 = -\frac{7}{9} n_3$

$n_3 := 9 \Rightarrow n_2 = 15 \wedge n_1 = -7 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$

(d) (1) $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \iff 2n_1 + 5n_2 - n_3 = 0$

(2) $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \iff 2n_1 - 4n_2 + n_3 = 0$

(1)+(2): $4n_1 + n_2 = 0 \iff n_2 = -4n_1$ (3)

(3)→(1): $2n_1 - 20n_1 - n_3 = 0 \iff n_3 = -18n_1$

$n_1 := 1 \Rightarrow n_2 = -4 \wedge n_3 = -18 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -18 \end{pmatrix}$

Übung 15.2

(a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -21 \\ -12 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-12 \\ -(-15-0) \\ 9-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ +15 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -18 \end{pmatrix}$

(b) offenbar gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -8 \\ -21 \\ -12 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 8 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix}$

In den beiden anderen Teilaufgaben sind die Lösungen identisch.

Übung 15.3

(a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12-(-12) \\ -(-6-(-6)) \\ -4-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ In beiden Teilaufgaben ist das Vektorprodukt der Nullvektor, weil die Vektoren linear abhängig sind.

Übung 15.4

Sei $\vec{n}$ ein Vektor, der orthogonal zu $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist.
Weil $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ als linear unabhängige Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, gibt es Skalare $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{n} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w} .$$

Aus der vorausgesetzten Orthogonalität folgt:

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w}) = \lambda\, \vec{n} \cdot \vec{u} + \mu\, \vec{n} \cdot \vec{v} + \nu\, \vec{n} \cdot \vec{w}$$
$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

Also gilt $\vec{n}^{\,2} = 0$ und daher $\|\vec{n}\| = 0$.
Dann muss aber $\vec{n}$ der Nullvektor sein. (Regel (14.16) (1))

Übung 15.5

(a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} = 16 - 36 + 20 = 0$; $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = 16 + 4 - 20 = 0$

Der Richtungsvektor der Geraden ℓ ist ein Normalenvektor der Ebene e ; also ist ℓ eine Normale der Ebene.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \overset{\cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}}{\Longrightarrow} -13 + 57\rho = 101$$

$\Rightarrow 57\rho = 114 \Rightarrow \rho = 2$

Der Durchstoßpunkt L ist gegeben durch $\vec{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} = -6+2+4 = 0$; $\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = 3+1-4 = 0$

Der Richtungsvektor der Geraden ℓ ist ein Normalenvektor der Ebene e ; also ist ℓ eine Normale von e.

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\8\\-9\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \xRightarrow{\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}} 13 + 26\rho = -65$$

$$\Rightarrow 26\rho = -78 \Rightarrow \rho = -3$$

Der Durchstoßpunkt L ist gegeben durch $\vec{L} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\0\\-11\end{pmatrix}$

<u>Übung 15.6</u>

$ABC: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\-5\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

(a) $\ell: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\5\\3\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}8\\5\\3\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \xRightarrow{\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}} 5 + 2\rho = -5 \Rightarrow \rho = -5$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix}8\\5\\3\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\8\end{pmatrix} \qquad d(Q,L) = \left\| 5\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\| = 5\sqrt{2}$$

(b) $\ell: \vec{x} = \begin{pmatrix}-16\\3\\9\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-16\\3\\9\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \xRightarrow{\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}} -25 + 2\rho = -5 \Rightarrow \rho = 10$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix}-16\\3\\9\end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\3\\-1\end{pmatrix} \qquad d(Q,L) = \left\| 10\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\| = 10\sqrt{2}$$

(c) $\ell: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\-8\\2\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-3\\-8\\2\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \xRightarrow{\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}} -5 + 2\rho = -5 \Rightarrow \rho = 0$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix}-3\\-8\\2\end{pmatrix} \qquad d(Q,L) = \|\vec{0}\| = 0$$

Übung 15.7

$$ABC: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\15\\6\end{pmatrix}$$

Lot von S auf ABC: $\ell: \vec{x} = \begin{pmatrix}15\\14\\4\end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix}5\\15\\6\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}15\\14\\4\end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix}5\\15\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix} \underset{\cdot\begin{pmatrix}5\\15\\6\end{pmatrix}}{\Longrightarrow} 309 + 286\rho = 23$$

$$\Rightarrow 286\rho = -286 \Rightarrow \rho = -1$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix}15\\14\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\15\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-1\\-2\end{pmatrix} \qquad d(S,L) = \left\| - \begin{pmatrix}5\\15\\6\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{286}$$

Übung 15.8

(a) $ABC: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-7\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}4\\-5\\1\end{pmatrix}$ Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

(1) $\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\t\\-1\end{pmatrix} = 0 \iff 8 - t - 5 = 0 \iff t = 3$

(1) $\rightarrow$ (2) $\begin{pmatrix}4\\-5\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix} = 0 \iff 16 - 15 - 1 = 0$ [wahr] g_t ist eine Normale für $t=3$

$$\begin{pmatrix}-13\\5\\3\end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-7\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}4\\-5\\1\end{pmatrix} \underset{\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}}{\Longrightarrow} -40 + 26\rho = 12 \Rightarrow \rho = 2$$

$$\vec{D} = \begin{pmatrix}-13\\5\\3\end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\11\\5\end{pmatrix}$$

(b) $ABC: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix}$ Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

(1) $\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\t\\2t\end{pmatrix} = 0 \iff -6 - 6t \iff t = -1$

(1) $\rightarrow$ (2) $\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\-1\\-2\end{pmatrix} = 0 \iff -3 - 5 + 2 = 0$ [falsch]

Es gibt keinen Parameter $t \in \mathbb{R}$, sodass g_t eine Normale der Ebene ABC ist.