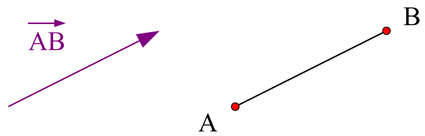
§14 Längen, Winkel und Skalarprodukt

In der Geometrie, die wir bisher entwickelt haben, wurden die erschaffenen Objekte keinen „Messungen“ unterzogen. Bislang gibt es weder einen Längen-, noch einen Winkel-, Abstands-, Flächen- oder Volumenbegriff.

Objekte werden „gemessen“, indem ihnen nach festgelegten Regeln reelle Zahlen zugeordnet werden. Ansatzweise haben wir das „Prinzip des Messens“ kennengelernt, als wir jedem Tripel dreier kollinearer Punkte ein reelles Teilverhältnis zuordneten.

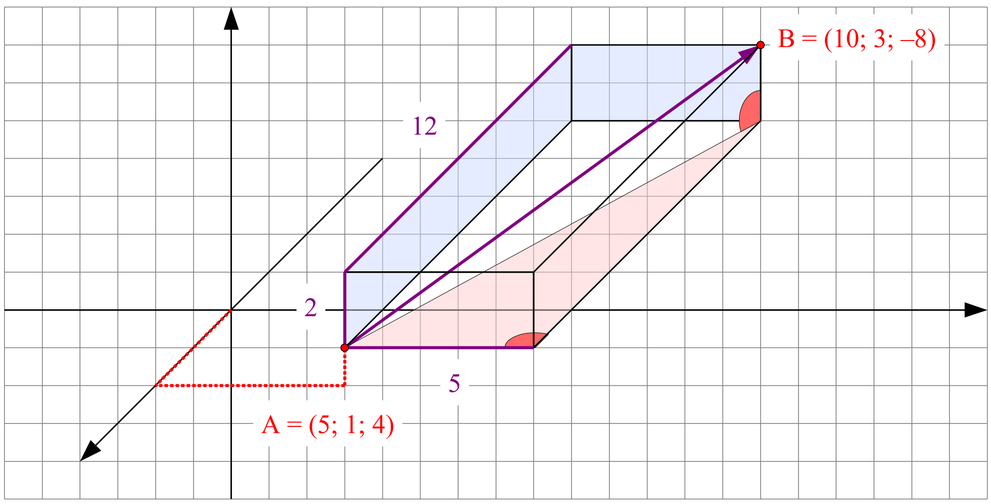
Grundlegend für die Längen-, Winkel-, Flächen- und Volumenmessung ist die **Bewertung der Lage, die zwei Punkte zueinander einnehmen**.



Ist nämlich erst einmal definiert, was unter dem „Abstand zweier Punkte“ zu verstehen ist, so ergibt sich daraus sofort der Begriff „Länge einer Strecke“, da eine Strecke durch ihre beiden Endpunkte vollständig beschrieben ist. Wie wir zeigen werden, können aus dem Längenbegriff auch alle weiteren Maßbegriffe abgeleitet werden.

Um zu einer Definition des Abstands zweier Punkte zu kommen, machen wir uns zunächst klar, dass dieser Abstand von den Koordinaten der Punkte abhängen muss, weil in diesen die gesamten Lageinformationen enthalten sind. Die Anschauung fordert, dass darüber hinaus der Abstand zweier Punkte „translationsinvariant[1]“ sein muss.

Die translationsinvarianten Informationen über die Lagebeziehung zweier Punkte A und B werden aber im Vektor $\overrightarrow{AB}$ vollständig wiedergegeben. Also liegt der Schlüssel zum Aufbau einer messenden Geometrie in einer geeigneten Bewertung von Vektoren.



Wir erinnern uns anhand eines Beispiels an die Abstandsmessung im Euklidischen Anschauungsraum. Betrachten wir dazu die Punkte

$$A = (a_1 ; a_2 ; a_3) = (5; 1; 4) \text{ und } B = (b_1 ; b_2 ; b_3) = (10; 3; -8)$$

in einem kartesischen Koordinatensystem.

Als Maßeinheit wird der Abstand verwendet, den die Zahlen 0 und 1 auf den Koordinatenachsen voneinander haben. Dann erhalten wir

$$|b_1 - a_1| = 5 \text{ und } |b_3 - a_3| = 12$$

als Länge der Katheten im rosafarbenen rechtwinkligen Dreieck. Dessen Hypotenuse hat daher die Länge

$$\sqrt{|b_1 - a_1|^2 + |b_3 - a_3|^2} = 13$$

1 Eine Bewertung von Objekten ist translationsinvariant, wenn Verschiebungen im Raum sie nicht ändern.

Damit kennen wir die Länge einer Kathete des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Strecke $\overline{AB}$ ist. Die andere Kathete hat offenbar die Länge

$$|b_2 - a_2| = 2 \ = 2 \,.$$

Wieder durch Anwendung des Satzes von Pythagoras erhalten wir

$$\sqrt{|b_1 - a_1|^2 + |b_2 - a_2|^2 + |b_3 - a_3|^2} = \sqrt{173}$$

als Länge der Strecke $\overline{AB}$.

Weil für jede reelle Zahl x die Beziehung $|x|^2 = x^2$ richtig ist, stehen unter der Wurzel die Quadrate der Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$. Damit ist klar, wie eine Bewertung der Vektoren definiert werden muss, damit mit ihrer Hilfe eine translationsinvariante, anschaulich vernünftige analytische Längenmessung begründet werden kann.

<u>(14.1) Definition</u>

Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ein Vektor des Modellraums $\mathbb{R}^3$.

Dann heißt die Zahl $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ *Betrag* des Vektors $\vec{x}$.

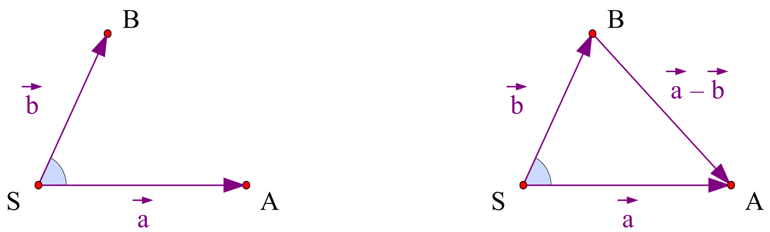
<u>(14.2) Definition</u>

Seien A und B zwei Punkte des Modellraums $\mathbb{R}^3$.

Dann heißt die Zahl $d(A, B) := \|\overrightarrow{AB}\|$ *Abstand der Punkte A und B* oder auch *Länge der Strecke* $\overline{AB}$.

Die Fachwissenschaft nennt eine Bewertungsfunktion für Vektoren, wie sie in (14.1) definiert ist, „Norm“ und spricht von einem „normierten Vektorraum“. Mit Hilfe einer Norm kann, wie in (14.2) vorgeführt, stets ein Abstandsbegriff erklärt werden.

Eigentlich liegt es jetzt nahe, Regeln für den Umgang mit dem Betrag von Vektoren und dem Abstand von Punkten aufzustellen und zu beweisen. Wie wir sehen werden, hat es jedoch große Vorteile, zuvor eine Winkelmessung einzuführen. Dann wird nämlich nämlich sichtbar, dass analytische Längen- und Winkelmessung auf derselben fundamentalen vektoriellen Operation aufbauen.



Ein Winkel wird durch drei Punkte S, A, B definiert, von denen einer als Scheitel S des Winkels ausgezeichnet ist. Die Größe des Winkels gibt an, wie sich die „Richtungen“ der beiden Ortsveränderungen unterscheiden, die durch den Scheitel S und jeweils einen der anderen Punkte A beziehungsweise B definiert sind. Offenbar erhalten wir eine translationsinvariante Bewertung des „Richtungsunterschieds“, wenn die Größe des Winkels nur in Abhängigkeit von den Koordinaten der Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$ beschrieben wird.

Bei der Suche nach einer geeigneten analytischen Winkeldefinition lassen wir uns wieder von der klassischen Geometrie leiten. Eines ihrer Resultate, der Kosinussatz, sagt aus, dass Winkel mit Hilfe von Streckenlängen berechnet werden können. Wir nehmen einfach einmal an, wir hätten bereits eine analytische Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren so abgefasst, dass der Kosinussatz erfüllt bleibt. Dann müsste Folgendes gelten:

$$\begin{aligned} & \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) \\ \Leftrightarrow \quad & (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2\,\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) \\ \Leftrightarrow \quad & -2a_1 b_1 - 2a_2 b_2 - 2a_3 b_3 = -2\,\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right)$$

Verwenden wir nun diese heuristisch ermittelte Beziehung als Definitionsgleichung, wird der Winkel zwischen Vektoren gerade so definiert, dass der Kosinussatz automatisch Gültigkeit behält. Zu bedenken ist allerdings, dass wir nicht wissen, ob die Beziehung, aus der wir die Definitionsgleichung durch Äquivalenzumformungen erhalten haben, auch algebraisch einwandfrei ist. Da die Kosinusfunktion nur Werte im Intervall [–1; 1] annimmt, muss vor einer Verwendung der hergeleiteten Definitionsgleichung eigentlich zuerst nachgeprüft werden, ob die

„kritische Doppelrelation“ $$-1 \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \leq 1$$

allgemeingültig ist. Andernfalls wären die oben stehenden Gleichungen nicht sinnvoll! Aus praktischen Gründen warten wir jedoch mit dem entsprechenden Beweis (siehe Satz (14.15)).

<u>(14.3) Definition</u>

Gegeben seien zwei vom Nullvektor $\vec{0}$ verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Dann heißt die Zahl $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right)$ *Winkel zwischen den Vektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$.

Da die Umkehrfunktion „arccos“ der Kosinusfunktion das Intervall [–1; 1] auf das Intervall [0°; 180°] bzw. [0; π] abbildet, gibt es im Rahmen dieser Theorie keine überstumpfen Winkel (Winkel größer als 180°). Tatsächlich ergibt die Betrachtung überstumpfer Winkel im Raum wenig Sinn, weil es im Gegensatz zur ebenen Geometrie im Raum keine Möglichkeit gibt, durch Festlegung einer allgemein gültigen Drehrichtung zwischen zwei verschiedenen Winkeln zu unterscheiden, die sich zu 360° ergänzen. Im Raum kann ein Winkel immer von zwei Seiten betrachtet werden!

<u>(14.4) Definition</u>

Gegeben seien im Modellraum drei verschiedene Punkte S, A und B.

Dann heißt die Zahl $\sphericalangle ASB = \sphericalangle(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB})$ *Winkel zwischen den Strahlen (Halbgeraden) SA und SB*.

Betrachten wir noch einmal die Definitionsgleichung für den Winkel zwischen zwei Vektoren, die auch den Betrag von Vektoren einbezieht.

$$\begin{aligned}\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) &= \arccos\left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right) = \arccos\left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3}\sqrt{b_1 b_1 + b_2 b_2 + b_3 b_3}}\right)\end{aligned}$$

Offenbar spielt sowohl für die Winkelgröße als auch für die Berechnung der Beträge folgende Operation eine entscheidende Rolle:

Aus $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ wird $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

Die Koordinaten zweier Vektoren werden zeilenweise multipliziert und die entstandene Produkte addiert.

(14.5) Definition

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Dann heißt die Zahl $\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ *Skalarprodukt der Vektoren* $\vec{x}$ *und* $\vec{y}$.

[Der Ausdruck wird „Vektor x Punkt Vektor y“ gelesen.]

Das Produkt erhält seinen Namen zur Betonung der Tatsache, dass das Resultat der Verknüpfung anders als bei der Vektorsumme nicht wieder ein Vektor, sondern ein Skalar, das heißt, eine reelle Zahl ist.

Nach der Einführung des Skalarprodukts kann sowohl der Betrag eines Vektors als auch der Winkel zwischen zwei Vektoren kurz und einprägsam geschrieben werden:

(14.6) Bemerkung

Für jeden Vektor $\vec{x}$ gilt: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$

(14.7) Bemerkung

Für je zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt: $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right)$

Die Beziehung $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ kann offenbar auch in der Form $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$ geschrieben werden. Da häufig beim Umgang mit Beträgen Produkte der Art $\vec{x} \cdot \vec{x}$ auftreten, verabreden wir außerdem noch folgende Kurzschreibweise:

(14.8) Bezeichnung

Ist $\vec{x}$ ein Vektor, so schreiben wir $\vec{x}^2 := \vec{x} \cdot \vec{x}$.

Die nach (14.6) und (14.8) für jeden Vektor $\vec{x}$ geltende Beziehung $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}^2}$ erinnert typographisch sehr an die Gleichung $|x| = \sqrt{x^2}$, die für alle reelle Zahlen x richtig ist.

Natürlich ist zu fragen, ob trotz der Verschiedenartigkeit der Verknüpfungen dem Skalarprodukt wie der Vektorsumme eine geometrische Bedeutung zukommt. Aufschluss darüber gibt die Beziehung, aus der die Definitionsgleichung für den Winkel gewonnen wurde:

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right) \Leftrightarrow \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))$$

Das Ergebnis der Äquivalenzumformung halten wir sofort fest:

(14.9) Bemerkung

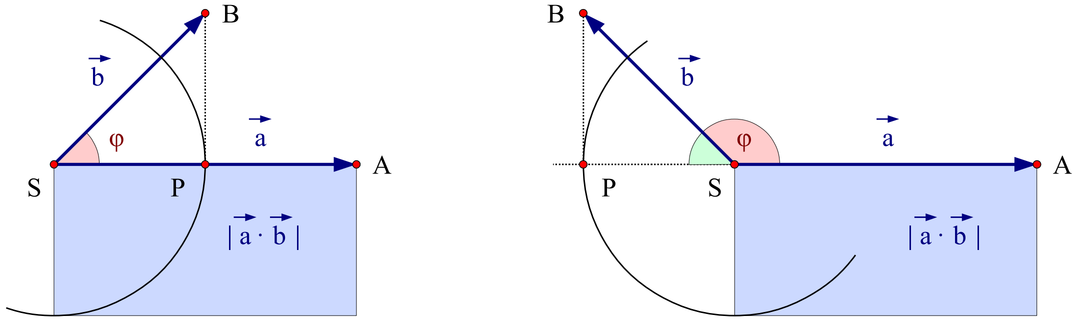
Für je zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) \quad \text{und daher} \quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))|$$

Es ist zu beachten, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren jeden reellen Wert, also auch negative Werte annehmen kann! Deshalb kann zwar nicht das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ selbst, aber dessen **Betrag** $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ aufgrund der Bemerkung (14.9) durch den Flächeninhalt eines Rechtecks dargestellt werden.

Die Seitenlängen des Rechtecks sind durch den Betrag eines Vektors, beispielsweise $\|\vec{a}\|$, und durch den Betrag der „orthogonalen[2] Projektion“ des anderen Vektors, also $\|\vec{b}\| \cdot |\cos(\sphericalangle \vec{a}, \vec{b})|$, gegeben:

2 orthogonal (griechisch): rechtwinklig



Erläuterungen der Grafiken unter Verwendung von $\varphi := \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$:

- Links: Im rechtwinkligen Dreieck SPB gilt $\dfrac{\overline{SP}}{\|\vec{b}\|} = \cos(\varphi)$ und daher $\overline{SP} = \|\vec{b}\| \cos(\varphi)$, wobei $\cos(\varphi) \geq 0$.
- Rechts: Im rechtwinkligen Dreieck SBP gilt $\dfrac{\overline{SP}}{\|\vec{b}\|} = \cos(180° - \varphi) = -\cos(\varphi)$, wobei $\cos(\varphi) \leq 0$.

Unter Verwendung des Betrags von $\cos(\varphi)$ ist daher die Beziehung $\overline{SP} = \|\vec{b}\| \cdot |\cos(\varphi)|$ immer richtig und damit die oben angesprochene geometrische Interpretation des Skalarprodukts gesichert.

Die Darstellung zeigt, dass bei fest vorgegebenen Beträgen der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ der Betrag des Skalarprodukts in Abhängigkeit vom eingeschlossenen Winkel zwischen minimal 0 und maximal $\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$ variieren sollte:

$$0 \;\leq\; |\vec{a} \cdot \vec{b}| \;\leq\; \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

Diese aus der Anschauung gewonnene Vermutung erinnert uns noch einmal an die oben eingegangene, aber noch nicht eingelöste Beweisverpflichtung zur „kritischen Doppelrelation“, denn folgende Äquivalenzen sind korrekt:

$$-1 \leq \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \;\Leftrightarrow\; |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

Der Betrag des Skalarprodukts $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ müsste den minimalen Wert 0 erreichen, wenn $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$ gilt, und den maximalen, wenn die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind. Bevor wir diese Vermutungen stichhaltig begründen, legen wir uns das (nicht nur für diesen Zweck) nützliche Regelwerk zurecht:

(14.10) Rechenregeln für das Skalarprodukt

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ seien Vektoren, λ eine reelle Zahl; dann gilt:

(1)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	(Kommutativgesetz)
(2)	$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$	(Distributivgesetz)
(3)	$(\lambda\, \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda\, (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda\, \vec{b})$	(gemischt assoziatives Gesetz)

Der simple Beweis wird jeweils durch Ausschreiben der Terme mit Hilfe der Definition (14.5) geführt. Die Ausführung wird dem Leser überlassen.

Wir betonen, dass das Skalarprodukt das Assoziativgesetz nicht erfüllt:

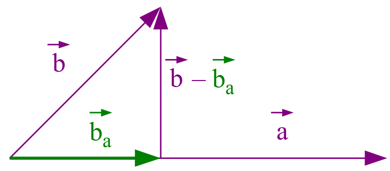
(14.11) Bemerkung

Für drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist die folgende Gleichung im allgemeinen falsch: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

Die Ungültigkeit ist schon daran zu erkennen, dass links vom Gleichheitszeichen ein Vielfaches des Vektors $\vec{c}$, rechts ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ steht!

Jetzt soll endlich die „kritische Doppelrelation“ in der Fassung $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$ bewiesen werden. Da sie zur Absicherung der Winkeldefinition benötigt wird muss der Nachweis ohne Verwendung des Winkelbegriffs erfolgen!

Wir lassen uns dabei von der zur Bemerkung (14.9) erstellten Grafik leiten und zerlegen den Vektor $\vec{b}$ in zwei Komponenten $\vec{b}=\vec{b}_a+(\vec{b}-\vec{b}_a)$ so, dass die erste Komponente $\vec{b}_a$ ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ ist und mit $\vec{a}$ das gleiche Skalarprodukt erzielt wie der Vektor $\vec{b}$ selbst.
Man kann sich diese Komponente als „orthogonale Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$ “ vorstellen.



(14.12) Bemerkung

Gegeben seien zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Dann gibt es genau einen Skalar $\lambda\in\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\vec{a}\cdot(\lambda\,\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Beweis:

$$\vec{a}\cdot(\lambda\,\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b} \;\Leftrightarrow\; \lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b} \;\Leftrightarrow\; \lambda=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}^2}$$

(14.13) Definition

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Der Vektor $\vec{a}$ sei vom Nullvektor verschieden.

Dann heiße der Vektor $\vec{b}_a := \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}^2}\,\vec{a}$ *Projektion des Vektors* $\vec{b}$ *auf den Vektor* $\vec{a}$.

Wir überprüfen, dass der so konstruierte Projektionsvektor die gewünschten Eigenschaften hat:

(14.14) Bemerkung

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Der Vektor $\vec{a}$ sei vom Nullvektor verschieden. Dann gilt:

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}_a=\vec{a}\cdot\vec{b}$ [Die erste Komponente liefert das volle Skalarprodukt.]

(2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{b}_a)=0$ [Die zweite Komponente trägt zum Skalarprodukt nichts bei.]

Beweis:

zu (1): $\vec{a}\cdot\vec{b}_a=\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}^2}\,\vec{a}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}^2}\,(\vec{a}\cdot\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b}$

zu (2): $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{b}_a)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}_a=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Der Vektor $\vec{b}-\vec{b}_a$ ist die zweite „orthogonal zum Vektor $\vec{a}$ “ angeordnete Komponente des Vektors $\vec{b}$. Je kürzer dieser Vektor ist, desto weniger müsste der Betrag des Skalarprodukts $\vec{a}\cdot\vec{b}$ von dem maximal möglichen Wert $\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$ abweichen. Wir schätzen seinen Betrag ab; er hat mindestens den Wert 0:

$$0\le\|\vec{b}-\vec{b}_a\|$$

$$\Leftrightarrow\; 0\le\|\vec{b}-\vec{b}_a\|^2 \qquad \Leftrightarrow\; 0\le(\vec{b}-\vec{b}_a)\cdot(\vec{b}-\vec{b}_a)$$

$$\Leftrightarrow\; 0\le\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}^2}\,\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}^2}\,\vec{a}\right) \qquad \Leftrightarrow\; 0\le\vec{b}^2-2\,\vec{b}\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}^2}\,\vec{a}+\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}^2}\right)^2\vec{a}^2$$

$$\Leftrightarrow\; 0\le\vec{b}^2-2\,\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\vec{a}^2}+\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\vec{a}^2} \qquad \Leftrightarrow\; 0\le\vec{b}^2-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\vec{a}^2}$$

$$\Leftrightarrow\; 0\le\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \qquad \Leftrightarrow\; (\vec{a}\cdot\vec{b})^2\le\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$$

$$\Leftrightarrow\; |\vec{a}\cdot\vec{b}|^2\le\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2 \qquad \Leftrightarrow\; |\vec{a}\cdot\vec{b}|\le\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$$

Das ist die gewünschte Relation, die die Definition des Winkelbegriffs absichert; sie hat einen berühmten Namen:

(14.15) Satz „Cauchy-Schwartzsche Ungleichung“

Für je zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

(1) $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$

(2) $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$ trifft genau dann zu, wenn die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind.

Beweis:

Es ist nur noch der zweite Teil nachzuweisen. Aus der vorangehenden Äquivalenzkette folgt:

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\| \;\Leftrightarrow\; 0 = \|\vec{b}-\vec{b}_a\| \;\Leftrightarrow\; \vec{0} = \vec{b}-\vec{b}_a \;\Leftrightarrow\; \vec{b} = \vec{b}_a$$

Da der Vektor $\vec{b}_a$ ein reelles Vielfaches vom Vektor $\vec{a}$ ist, gilt auch die Behauptung (2).

Offenbar bleiben die Aussagen auch richtig, wenn es sich bei $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ um den Nullvektor handelt.

Bei den letzten Umformungen im vorangehenden Beweis wird verwendet, dass der Betrag eines Vektors genau dann 0 ergibt, wenn es sich um den Nullvektor handelt. Wir halten diesen Sachverhalt zusammen mit zwei weiteren Rechenregeln für den Betrag von Vektoren gesondert fest. Beachte auch die ergänzende Übung 14.8!

(14.16) Rechenregeln für den Betrag von Vektoren

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien Vektoren, λ eine reelle Zahl; dann gilt:

(1) $\|\vec{a}\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = \vec{0}$

(2) $\|\lambda\,\vec{a}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{a}\|$, insbesondere $\|-\vec{a}\| = \|\vec{a}\|$

(3) $\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$ („Dreiecksungleichung“)

(4) $\|\vec{a}-\vec{b}\| \ge \big|\,\|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|\,\big|$ („Folgerung aus der Dreiecksungleichung“)

Beweis zu (1):

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

Eine Summe von Quadraten ist genau dann null, wenn jeder Summand verschwindet.

Beweis zu (2):

$$\|\lambda\,\vec{a}\| = \sqrt{\lambda^2\,a_1^2+\lambda^2\,a_2^2+\lambda^2\,a_3^2} = \sqrt{\lambda^2\,(a_1^2+a_2^2+a_3^2)} = |\lambda|\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = |\lambda|\cdot\|\vec{a}\|$$

Beweis zu (3):

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\| \quad &\Leftrightarrow \quad \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 \le (\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|)^2\\
&\Leftrightarrow \quad (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \le \|\vec{a}\|^2+2\,\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|+\|\vec{b}\|^2\\
&\Leftrightarrow \quad \vec{a}^2+2\,(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{b}^2 \le \vec{a}^2+2\,\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|+\vec{b}^2\\
&\Leftrightarrow \quad 2\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) \le 2\,\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\\
&\Leftrightarrow \quad (\vec{a}\cdot\vec{b}) \le \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\| \qquad \text{(vgl. Cauchy-Schwartzsche Ungleichung)}
\end{aligned}$$

Beweis zu (4):

$$\|\vec{a}\| = \|(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}\| \le \|\vec{a}-\vec{b}\|+\|\vec{b}\| \quad\Rightarrow\quad \|\vec{a}\|-\|\vec{b}\| \le \|\vec{a}-\vec{b}\|$$

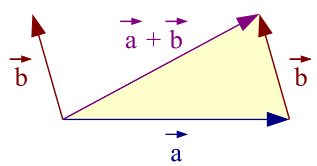
Gilt nun $\|\vec{a}\| \ge \|\vec{b}\|$, so dürfen Betragsstriche gesetzt werden: $\big|\,\|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|\,\big| \le \|\vec{a}-\vec{b}\|$

Gilt $\|\vec{a}\| < \|\vec{b}\|$, so liefern die bisherigen Überlegungen zunächst: $\|\vec{b}\|-\|\vec{a}\| \le \|\vec{b}-\vec{a}\|$

Da aber linksseitig $\|\vec{b}\|-\|\vec{a}\| = \big|\,\|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|\,\big|$ und rechtsseitig $\|\vec{b}-\vec{a}\| = \|-(\vec{a}-\vec{b})\| = \|\vec{a}-\vec{b}\|$ gilt,

folgt auch in diesem Fall $\big|\,\|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|\,\big| \le \|\vec{a}-\vec{b}\|$.

Anmerkung: Die Dreiecksungleichung besagt, dass in einem Dreieck die Länge einer Seite höchstens so groß sein kann, wie die die Summe der Längen der anderen beiden Seiten. In ihrer Formulierung wird benutzt, dass ein Dreieck immer mit Hilfe zweier Vektoren und ihrer Summe dargestellt werden kann.



Mit etwas mehr Aufwand erhalten wir auch Rechenregeln für Winkel:

(14.17) Rechenregeln für Winkel zwischen Vektoren

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien Vektoren, λ eine reelle Zahl; dann gilt:

(1) $\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{b};\vec{a})$

(2) $\sphericalangle(\lambda\,\vec{a};\vec{b}) = \begin{cases} \sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) & \text{, falls } \lambda > 0 \\ 180° - \sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) & \text{, falls } \lambda < 0 \end{cases}$

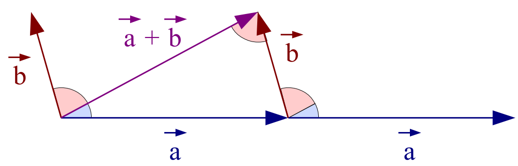
(3) $\sphericalangle(\vec{a};\vec{a}+\vec{b}) + \sphericalangle(\vec{a}+\vec{b};\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a};\vec{b})$ [Winkelsummensatz / Außenwinkelsatz]

Beweis zu (1): trivial

Beweis zu (2): Verwende die für $\alpha \in [0°;180°]$ gültige Beziehung $-\cos(\alpha) = \cos(180° - \alpha)$

Beweis zu (3): Verwende das Additionstheorem $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ und die Beziehung $\sin(\arccos(z)) = \sqrt{1-z^2}$.

Der Winkelsummensatz für Dreiecke ist ein fundamentaler Bestandteil der Euklidischen Geometrie. Wegen des Nebenwinkelsatzes ist er äquivalent zum sogenannten „Außenwinkelsatz“: „Die Summe zweier Innenwinkel eines Dreiecks ist so groß wie der gegenüber liegende Außenwinkel.“



Es ist eine wichtige Bestätigung für unserer Theorieentwicklung, dass der Winkelsummensatz auch für unseren analytischen Winkelbegriff Bestand hat!

Der Beweis zu (3) erfordert algebraische Sorgfalt und Ausdauer. Er ist eine gute Übung zum Umgang mit dem Skalarprodukt und dem Betrag von Vektoren! Für ungeduldige Leser gibt es in einem Anhang zu diesem Paragraphen eine Ausführung des Beweises.

In der Vorbereitung des Beweises zur Cauchy-Schwartzschen Ungleichung hatten wir das Verschwinden des Skalarprodukts zum Anlass genommen, von einer „orthogonalen Anordnung“ von Vektoren zu sprechen. Wir präzisieren:

(14.18) Bemerkung

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren; dann gilt: $\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 90° \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Beweis:

$\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 90° \Leftrightarrow \cos(\sphericalangle(\vec{a};\vec{b})) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Wir führen sogleich den offiziellen Begriff ein:

(14.19) Definition

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen *orthogonal*, wenn $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ gilt.

Der nächste Paragraph wird sich ausgiebig mit der Orthogonalität von Vektoren beschäftigen.

Eine weitere besondere Anordnung liegt vor, wenn der Winkel zwischen zwei Vektoren exakt 0° oder exakt 180° beträgt. Offenbar müssen sie dann linear abhängig sein; genauer gesagt:

(14.20) Bemerkung

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren; dann gilt:

$\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 0° \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } b = \lambda\,\vec{a}$

$\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 180° \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}^- \text{ mit } b = \lambda\,\vec{a}$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
& \sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 0° \;\vee\; \sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 180°\\
\Leftrightarrow\quad & \cos(\sphericalangle(\vec{a};\vec{b})) = 1 \;\vee\; \cos(\sphericalangle(\vec{a};\vec{b})) = -1\\
\Leftrightarrow\quad & |\cos(\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}))| = 1\\
\Leftrightarrow\quad & \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}\right| = 1\\
\Leftrightarrow\quad & |\vec{a}\cdot\vec{b}| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\\
\Leftrightarrow\quad & \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind linear abhängig}
\end{aligned}
$$

Die letzte Äquivalenz liefert der Zusatz zur Cauchy-Schwartzschen Ungleichung (14.15).

Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vom Nullvektor verschieden sind, sind sie genau dann linear abhängig, wenn es einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gibt mit $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Nun folgt der Reihe nach:

$$\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 0° \;\Rightarrow\; \vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \;\Rightarrow\; \vec{a}\cdot(\lambda\vec{a}) = \|\vec{a}\|\|\lambda\vec{a}\| \;\Rightarrow\; \lambda\vec{a}^{\,2} = |\lambda|\|\vec{a}\|^2 .$$

Das bedeutet, dass $\lambda = |\lambda|$ und damit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ gelten muss.

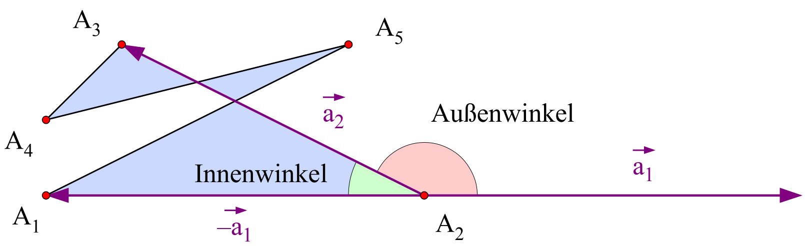
Analog wird gezeigt, dass $\lambda \in \mathbb{R}^-$, falls $\sphericalangle(\vec{x};\vec{y}) = 180°$ gilt.

Nachdem wir nun in der Lage sind, Streckenlängen und Winkelgrößen zu messen, können wir unsere Begriffsbildungen in der Figurenlehre ein Stück weiter vorantreiben. Wir beschränken uns hier auf Dreiecke. In einem der folgenden Paragraphen werden wir auch noch einen analytischen Blick auf ebene Vierecke werfen.

<u>(14.21) Definition</u>

Gegeben sei ein Polygon $\langle A_1 A_2 \dots A_n\rangle$, wobei $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, mit den Seitenvektoren $\vec{a}_i = \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ für $1 \leq i \leq n{-}1$ und $\vec{a}_n = \overrightarrow{A_n A_1}$.

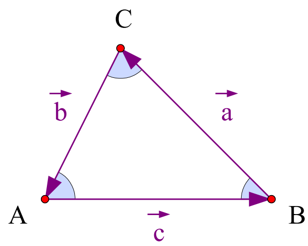
Dann heißen die Winkel $\sphericalangle(\vec{a}_i, \vec{a}_{i+1})$, $1 \leq i \leq n{-}1$, und $\sphericalangle(\vec{a}_n, \vec{a}_1)$ Außenwinkel des Polygons und die Winkel $\sphericalangle(-\vec{a}_i, \vec{a}_{i+1})$, $1 \leq i \leq n{-}1$, und $\sphericalangle(-\vec{a}_n, \vec{a}_1)$ Innenwinkel des Polygons.



Die Längen der Seiten des Polygons sind bereits durch die Definitionen (7.1) und (14.2) erklärt.

<u>(14.22) Definition</u>

Im Modellraum heiße ein Dreieck $\langle ABC\rangle$
- *rechtwinklig*, wenn zwei seiner drei Seitenvektoren orthogonal sind.
- *stumpfwinklig*, wenn einer seiner drei Innenwinkel größer als 90° ist.
- *spitzwinklig*, wenn alle drei Innenwinkel kleiner als 90° sind.
- *gleichschenklig*, wenn zwei Seitenvektoren den gleichen Betrag besitzen.
- *gleichseitig*, wenn alle drei Seitenvektoren den gleichen Betrag haben.



In den Übungen zu diesem Paragraphen werden klassische Erkenntnisse über Dreiecke, darunter die Satzgruppe des Pythagoras, in den Modellraum übertragen.

Anhang zum §14

Wir führen hier den Nachweis des Außenwinkelsatzes in der Formulierung (14.17)(3).
Verwendet werden dabei folgende trigonometrische Identitäten:

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} \quad \forall\, \alpha \in [0°\,;\,180°]$
- $\sin(\arccos(z)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(z))} = \sqrt{1 - z^2}$

Wir möchten die Gleichung $\sphericalangle(\vec{a}\,;\vec{a}+\vec{b}) + \sphericalangle(\vec{a}+\vec{b}\,;\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a}\,;\vec{b})$ nachweisen.
Dazu zeigen wir, dass $\cos(\sphericalangle(\vec{a}\,;\vec{a}+\vec{b}) + \sphericalangle(\vec{a}+\vec{b}\,;\vec{b})) = \cos(\sphericalangle(\vec{a}\,;\vec{b}))$ gilt.

Zunächst schauen wir uns das Berechnungsziel an: $\cos(\sphericalangle(\vec{a}\,;\vec{b})) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}$

Nun berechnen wir die linke Seite der Gleichung unter Verwendung der trigonometrischen Identitäten:

$$
\begin{aligned}
& \cos(\sphericalangle(\vec{a}\,;\vec{a}+\vec{b}) + \sphericalangle(\vec{a}+\vec{b}\,;\vec{b})) \\
= \quad & \cos(\sphericalangle(\vec{a}\,;\vec{a}+\vec{b}))\cos(\sphericalangle(\vec{a}+\vec{b}\,;\vec{b})) - \sin(\sphericalangle(\vec{a}\,;\vec{a}+\vec{b}))\sin(\sphericalangle(\vec{a}+\vec{b}\,;\vec{b})) \\
= \quad & \frac{\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{a}+\vec{b}\|}\cdot\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}+\vec{b}\|\,\|\vec{b}\|} - \sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{a}+\vec{b}\|}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}+\vec{b}\|\,\|\vec{b}\|}\right)^2} \\
= \quad & \frac{(\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2)}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\,\|\vec{b}\|} - \sqrt{\frac{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{a}+\vec{b}\|^2-(\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{a}+\vec{b}\|^2}}\sqrt{\frac{\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\,\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2)^2}{\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\,\|\vec{b}\|^2}}
\end{aligned}
$$

[Beachte: $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \vec{b}^2$]

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{\vec{a}^2(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{a}^2\,\vec{b}^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{b}^2}{\|\vec{a}\|\;\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\;\|\vec{b}\|} \\
- \quad & \sqrt{\frac{\vec{a}^2(\vec{a}^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{b}^2)-((\vec{a}^2)^2+2\,\vec{a}^2(\vec{a}\cdot\vec{b})+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2)}{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{a}+\vec{b}\|^2}}\sqrt{\frac{(\vec{a}^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{b}^2)(\vec{b})^2-((\vec{a}\cdot\vec{b})^2+2(\vec{s}\cdot\vec{b})\,\vec{b}^2+(\vec{b}^2)^2)}{\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\,\|\vec{b}\|^2}} \\
= \quad & \frac{\vec{a}^2(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{a}^2\,\vec{b}^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{b}^2}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\,\|\vec{b}\|} - \sqrt{\frac{\vec{a}^2\,\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{a}+\vec{b}\|^2}}\sqrt{\frac{\vec{a}^2\,\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\,\|\vec{b}\|^2}} \\
= \quad & \frac{\vec{a}^2(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{a}^2\,\vec{b}^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{b}^2}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\,\|\vec{b}\|} - \frac{\vec{a}^2\,\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\,\|\vec{b}\|} \\
= \quad & \frac{\vec{a}^2(\vec{a}\cdot\vec{b})+2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{a}^2}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\,\|\vec{b}\|} \\
= \quad & \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{a}^2)}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\,\|\vec{b}\|} && \text{[Beachte: } \vec{a}^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{b}^2=(\vec{a}+\vec{b})^2 \text{]} \\
= \quad & \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})^2}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\,\|\vec{b}\|} && \text{[Beachte: } (\vec{a}+\vec{b})^2=\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 \text{]} \\
= \quad & \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}
\end{aligned}
$$

Das war zu beweisen!