Übungen zu §14

Übung 14.1

Berechne in dem Dreieck $\langle ABC \rangle$ die Längen der drei Seiten und die Größe der drei Innenwinkel.
Gib an, welcher Dreieckstyp gemäß Definition (14.22) vorliegt.

(a) $A = (4; -3; 11)$, $B = (-2; 6; 0)$, $C = (-7; -8; -5)$ (b) $A = (-2; 0; 13)$, $B = (5; -6; 2)$, $C = (12; 3; -4)$

(c) $A = (-7; 1; 3)$, $B = (-4; 3; 2)$, $C = (-5; 2; 0)$ (d) $A = (1; 0; 0)$, $B = (0; 1; 0)$, $C = (0; 0; 1)$

Übung 14.2

Zeige, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \\ 22 \end{pmatrix}$ paarweise einen rechten Winkel bilden.

Übung 14.3

Beweise, dass in einem Polygon an jedem Eckpunkt Innen- und Außenwinkel supplementär sind, das heißt, sich zu 180° ergänzen.

Vereinbarung für die Übungen 14.4 bis 14.6

Im Dreieck $\langle ABC \rangle$ verwenden wir die Abkürzungen $\vec{c} := \overrightarrow{AB}$, $\vec{a} := \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} := \overrightarrow{CA}$, sodass $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ gilt.

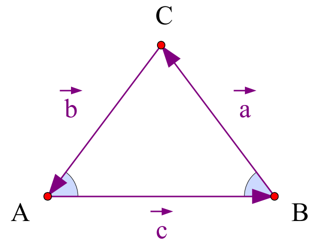
Übung 14.4

Beweise das so genannte „Basiswinkeltheorem“:

Ein Dreieck (aus drei nicht kollinearen Punkten) ist genau dann gleichschenklig, wenn zwei seiner Innenwinkel gleich groß sind.

und damit auch sein Korollar:

Ein Dreieck (aus drei nicht kollinearen Punkten) ist genau dann gleichseitig, wenn alle drei Innenwinkel gleich groß sind.



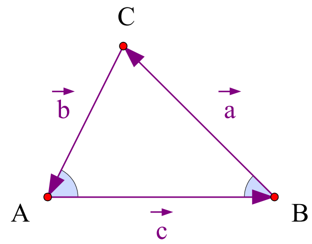
Tipps:

- $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$
- Zeige: $\sphericalangle(\vec{a}\,; -\vec{c}) = \sphericalangle(\vec{c}\,; -\vec{b}) \;\Leftrightarrow\; (\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| - \vec{a}\cdot\vec{b})\,(\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|) = 0$
- Beachte den Zusatz zur Cauchy-Schwartzschen Ungleichung (14.15)(2).

Übung 14.5

Beweise die so genannte „Winkel-Seite-Relation im Dreieck“:

In einem Dreieck (aus drei nicht kollinearen Punkten) liegt der längeren von zwei Seiten stets der größere Innenwinkel und - umgekehrt - dem größeren von zwei Innenwinkeln stets die längere Seite gegenüber.



Tipps:

- $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$
- arccos ist auf dem Definitionsintervall $[-1; 1]$ streng monoton fallend.
- Zeige: $\sphericalangle(-\vec{c}\,; \vec{a}) < \sphericalangle(-\vec{b}\,; \vec{c}) \;\Leftrightarrow\; (\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| - \vec{a}\cdot\vec{b})\,(\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|) > 0$
- Beachte die Cauchy-Schwartzsche Ungleichung (14.15).

Übung 14.6

Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ drei Vektoren. Beweise (mit Bezug auf Definition (14.13)):

(a) Sind die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig und vom Nullvektor verschieden, so gilt $\vec{a}_b = \vec{a}_c$.

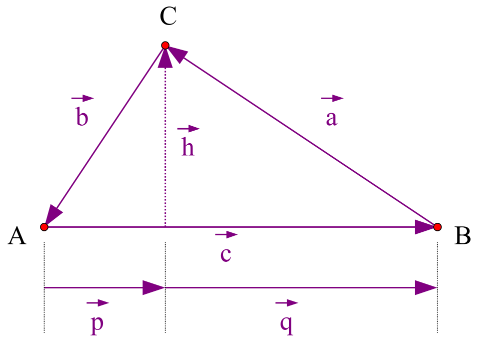
(b) Ist der Vektor $\vec{c}$ vom Nullvektor verschieden und sind $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zwei Skalare, so gilt

$$(\lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b})_c = \lambda\,\vec{a}_c + \mu\,\vec{b}_c$$

Übung 14.7

Im Dreieck $\langle ABC\rangle$ (aus drei nicht kollinearen Punkten) seien die Bezeichnungen $\vec{c} := \overrightarrow{AB}$, $\vec{a} := \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} := \overrightarrow{CA}$ vereinbart, sodass $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ gilt.

Die Rechtwinkligkeit des Dreiecks $\langle ABC\rangle$ sei durch $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ gegeben und außerdem gelte gemäß Definition (14.13) $\vec{p} := (-\vec{b})_c$ sowie $\vec{h} = -\vec{p} - \vec{b}$ und $\vec{q} = \vec{c} - \vec{p}$.



Beweise unter diesen Voraussetzungen:

(a) $\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$ (Satz des Pythagoras)

(b) $\|\vec{b}\|^2 = \|\vec{p}\| \cdot \|\vec{c}\|$, $\|\vec{a}\|^2 = \|\vec{q}\| \cdot \|\vec{c}\|$ (Kathetensätze des Euklid)

(c) $\|\vec{h}\|^2 = \|\vec{p}\| \cdot \|\vec{q}\|$ (Höhensatz des Euklid)

Tipps:

zu (a): Berechne $\vec{c}^{\,2}$.

zu (b): Zeige $\vec{b}^{\,2} = (-\vec{b}) \cdot \vec{c}$ und beachte, dass $(-\vec{b}) \cdot \vec{c} = (-\vec{b})_c \cdot \vec{c}$ gilt.

Für einen Nachweis des zweiten Kathetensatzes $\|\vec{a}\|^2 = \|\vec{q}\| \cdot \|\vec{c}\|$ ist die Beziehung $\vec{q} = (-\vec{a})_c$ zu bestätigen.

zu (c): Leite zunächst $\|\vec{h}\|^2 = \vec{b}^{\,2} - \vec{p}^{\,2}$ her und verwende dann $\vec{p}^{\,2} = \vec{p} \cdot (\vec{c} - \vec{q})$.

Übung 14.8

Beweise die folgende Ergänzungen zur Dreiecksungleichung (14.16)(3):

(a) Sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ positive Vielfache voneinander, so gilt $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

(b) Sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ negative Vielfache voneinander, so gilt $\|\vec{a} + \vec{b}\| = |\,\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|\,|$.