Übung 14.1

(a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$ $\quad \|\vec{AB}\| = \sqrt{36+81+121} = \sqrt{238}$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -14 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad \|\vec{BC}\| = \sqrt{246}$; $\quad \vec{CA} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$ $\quad \|\vec{CA}\| = \sqrt{402}$

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle(\vec{AB}; \vec{AC}) = \arccos\left(\frac{-6\cdot(-11) + 9\cdot(-5) - 11\cdot(-16)}{\sqrt{238}\cdot\sqrt{402}} \right)$$

$$= \arccos\left(\frac{197}{\sqrt{238}\cdot\sqrt{402}} \right) \approx \arccos(0{,}6369) \approx 50{,}4397^\circ$$

$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle(\vec{BC}; \vec{BA}) = \arccos\left(\frac{-5\cdot 6 - 14\cdot(-9) - 5\cdot 11}{\sqrt{246}\cdot\sqrt{238}} \right)$$

$$= \arccos\left(\frac{41}{\sqrt{246}\sqrt{238}} \right) \approx \arccos(0{,}1694) \approx 80{,}2445^\circ$$

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle(\vec{CA}; \vec{CB}) = \arccos\left(\frac{11\cdot 5 + 5\cdot 14 + 16\cdot 5}{\sqrt{246}\cdot\sqrt{402}} \right)$$

$$= \arccos\left(\frac{205}{\sqrt{246}\cdot\sqrt{402}} \right) \approx \arccos(0{,}6519) \approx 49{,}3159^\circ$$

$\langle ABC \rangle$ ist spitzwinklig

(b) $\|\vec{AB}\| = \sqrt{206}$; $\|\vec{BC}\| = \sqrt{166}$; $\|\vec{CA}\| = \sqrt{494}$

$$\sphericalangle BAC = \arccos\left(\frac{267}{\sqrt{206}\sqrt{494}} \right) \approx 33{,}1776^\circ$$

$$\sphericalangle CBA = \arccos\left(\frac{-61}{\sqrt{166}\sqrt{206}} \right) \approx 109{,}2609^\circ$$

$$\sphericalangle ACB = \arccos\left(\frac{227}{\sqrt{166}\sqrt{494}} \right) \approx 37{,}5615^\circ$$

$\langle ABC \rangle$ ist stumpfwinklig.

(c) $\|\vec{AB}\| = \sqrt{14}$; $\|\vec{BC}\| = \sqrt{6}$; $\|\vec{CA}\| = \sqrt{14}$

$$\sphericalangle BAC = \arccos\left(\frac{11}{\sqrt{14}\sqrt{14}} \right) \approx 38{,}2132^\circ$$

$$\sphericalangle CBA = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}} \right) \approx 70{,}8934^\circ$$

$$\sphericalangle ACB = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}} \right) \approx 70{,}8934^\circ$$

$\langle ABC \rangle$ ist ein spitzwinkliges gleichschenkliges Dreieck.

(d) $\|\vec{AB}\| = \|\vec{BC}\| = \|\vec{CA}\| = \sqrt{2}$

$$\sphericalangle BAC = \arccos\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sphericalangle CBA = \sphericalangle ACB = 60^\circ$$

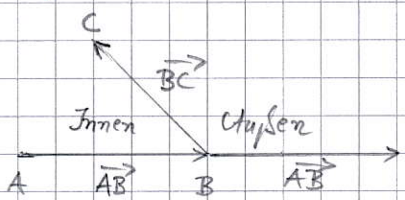
Gleichseitiges spitzwinkliges Dreieck

Übung 14.2

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 5 - 4\cdot 1 - 3\cdot 2 = 0$; ebenso gilt $\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ und $\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$

Also sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ paarweise orthogonal.

Übung 14.3



Innenwinkel bei B : $\sphericalangle(\vec{BC}, \vec{BA}) = \sphericalangle(\vec{BA}, \vec{BC})$

Außenwinkel bei B : $\sphericalangle(\vec{AB}, \vec{BC})$

$$\sphericalangle(\vec{AB}, \vec{BC}) = \sphericalangle(-\vec{BA}, \vec{BC}) = 180^\circ - \sphericalangle(\vec{BA}, \vec{BC})$$

Also folgt sofort $\sphericalangle(\vec{AB}, \vec{BC}) + \sphericalangle(\vec{BA}, \vec{BC}) = 180^\circ$

Übung 14.4

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden als linear unabhängig vorausgesetzt.

Mit den in der Figur gegebenen Bezeichnungen ergibt sich

$$\vec{c} = -\vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} - \vec{b} \ ; \ -\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle(\vec{a}; -\vec{c}) \ ; \ \sphericalangle BAC = \sphericalangle(\vec{c}; -\vec{b})$$

$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAC \iff \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot(-\vec{c})}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{c}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{c}\cdot(-\vec{b})}{\|\vec{c}\|\|\vec{b}\|}\right)$$

$$\iff -\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\|\vec{a}\|} = -\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\|\vec{b}\|} \iff -\vec{a}\cdot(-\vec{a}-\vec{b})\cdot\|\vec{b}\| = -\vec{b}\cdot(-\vec{a}-\vec{b})\|\vec{a}\|$$

$$\iff (\vec{a}^2 + \vec{a}\cdot\vec{b})\|\vec{b}\| = (\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2)\|\vec{a}\|$$

$$\iff \|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\| + \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\|\vec{b}\| = \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|^2\cdot\|\vec{a}\|$$

$$\iff \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|(\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|) = \vec{a}\cdot\vec{b}(\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|)$$

$$\iff (\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\| - \vec{a}\cdot\vec{b})(\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|) = 0$$

Aufgrund des Zusatzes der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung (14.15)(2) kann der linke Faktor nicht verschwinden; also ist die letzte Gleichung äquivalent zu $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$!

Übung 14.5

Weil die Eckpunkte als nicht kollinear vorausgesetzt sind, müssen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sein.

Wie in Übung 14.4 gilt $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$ bzw. $-\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Wir folgen dem Umformungsweg von Übung 14.4:

$$\sphericalangle CBA < \sphericalangle BAC \iff \sphericalangle(-\vec{c};\vec{a}) < \sphericalangle(-\vec{b};\vec{c})$$

$$\iff \arccos\left(\frac{-\vec{c}\cdot\vec{a}}{\|\vec{c}\|\cdot\|\vec{a}\|}\right) < \arccos\left(\frac{-\vec{b}\cdot\vec{c}}{\|\vec{b}\|\cdot\|\vec{c}\|}\right)$$

$$\underset{\text{streng monoton fallend}}{\overset{\arccos}{\iff}} \quad \frac{-\vec{c}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|} > \frac{-\vec{b}\cdot\vec{c}}{\|\vec{b}\|}$$

$$\iff (\vec{a}^2 + \vec{a}\cdot\vec{b})\|\vec{b}\| > (\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2)\|\vec{a}\|$$

$$\iff \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\| + \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\|\vec{b}\| > \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|^2\cdot\|\vec{a}\|$$

$$\iff \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|(\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|) - \vec{a}\cdot\vec{b}(\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|) > 0$$

$$\iff (\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| - \vec{a}\cdot\vec{b})(\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|) > 0$$

$$\iff \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| > 0 \iff \|\vec{b}\| < \|\vec{a}\|$$

Begründung der letzten Äquivalenz:

Aufgrund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist bei linear unabhängigen Vektoren der Term $\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\| - \vec{a}\cdot\vec{b}$ garantiert positiv, also dürfen beide Seiten der Ungleichung durch diesen Term dividiert werden. Insgesamt ist bewiesen:

$$\sphericalangle CBA < \sphericalangle BAC \iff \overline{AC} < \overline{BC}$$

Übung 14.6

(a) Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sein sollen, gibt es einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\vec{b} = \lambda \vec{c}$. Mit Definition (14.13) folgt:

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}^2}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot(\lambda\vec{c})}{(\lambda\vec{c})^2}\vec{b} = \frac{\lambda(\vec{a}\cdot\vec{c})}{\lambda^2\vec{c}^2}\lambda\vec{c} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\vec{c}^2}\vec{c} = \vec{a}_c$$

(b) $$(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})_c = \frac{(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\cdot\vec{c}}{\vec{c}^2}\vec{c} = \frac{\lambda(\vec{a}\cdot\vec{c})+\mu(\vec{b}\cdot\vec{c})}{\vec{c}^2}\vec{c}$$

$$= \lambda\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\vec{c}^2}\vec{c} + \mu\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\vec{c}^2}\vec{c} = \lambda\vec{a}_c + \mu\vec{b}_c$$

Übung 14.7

(a) $$\|\vec{c}\|^2 = \vec{c}^2 = (-\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{=0} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2+\vec{b}^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$$

(b) $$\|\vec{b}\|^2 = \vec{b}^2 = \vec{b}\cdot(-\vec{c}-\vec{a}) = -\vec{b}\cdot\vec{c} - \underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{=0} = -\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$= (-\vec{b})\cdot\vec{c} = (-\vec{b})_c\cdot\vec{c} = \vec{p}\cdot\vec{c}$$

$= \|\vec{p}\|\cdot\|\vec{c}\|$ wegen des Zusatzes (14.15)(2) zur Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, denn $\vec{p}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig.

(c) $\|\vec{h}\|^2 = \vec{h}^2 = \vec{h}\cdot\vec{h} =$

$= \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{p}\|^2$ gemäß Teilaufgabe (a) „Satz des Pythagoras"

$= \vec{b}^2 - \vec{p}^2$

$= \vec{b}^2 - \vec{p}\cdot(\vec{c}-\vec{q})$ denn $\vec{c} = \vec{p}+\vec{q}$

$= \vec{b}^2 - \vec{p}\cdot\vec{c} + \vec{p}\cdot\vec{q}$

$= \vec{p}\cdot\vec{q}$ denn $\vec{b}^2 = \vec{p}\cdot\vec{c}$ gemäß Teilaufgabe (b)

$= \|\vec{p}\|\cdot\|\vec{q}\|$ gemäß (14.15)(2), weil $\vec{p}$ und $\vec{q}$ linear abhängig sind.

Übung 14.8

(a) Gelte $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Ist einer der beiden Vektoren der Nullvektor, so auch der andere.

In diesem Fall ist die Aussage $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

trivialer Weise richtig. Andernfalls gilt

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}+\vec{b}\| &= \|\vec{a}+\lambda\vec{a}\| = \|(1+\lambda)\vec{a}\| \\
&= (1+\lambda)\|\vec{a}\| \quad \text{gemäß Regel (14.16) (2) ; } 1+\lambda > 0 \\
&= \|\vec{a}\| + \lambda\|\vec{a}\| \\
&= \|\vec{a}\| + \|\lambda\vec{a}\| \quad \text{gemäß Regel (14.16) (2)} \\
&= \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|
\end{aligned}$$

(b) Gelte $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^-$. Dann ist $-\lambda \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}+\vec{b}\| &= \|\vec{a}+\lambda\vec{a}\| = \|(1+\lambda)\vec{a}\| \\
&= |1+\lambda| \cdot \|\vec{a}\| \quad \text{gemäß Regel (14.16) (2)} \\
&= \big|\, \|\vec{a}\| + \lambda\|\vec{a}\| \,\big| \\
&= \big|\, \|\vec{a}\| - (-\lambda)\|\vec{a}\| \,\big| \\
&= \big|\, \|\vec{a}\| - \|(-\lambda)\vec{a}\| \,\big| \quad \text{gemäß Regel (14.16) (2)} \\
&= \big|\, \|\vec{a}\| - \|\lambda\vec{a}\| \,\big| \\
&= \big|\, \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| \,\big|
\end{aligned}$$