Übung 13.1

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}; \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad ABC: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(a) $P \in ABC \iff \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&(1) \quad 8\lambda + 6\mu = 10 \\
&(2) \quad -4\lambda = -3 \iff \lambda = \frac{3}{4} \\
&[\,(3) \quad 12\lambda + 12\mu = 17\,]
\end{aligned}$$

$(2) \to (1): \quad 6 + 6\mu = 10 \iff 6\mu = 4 \iff \mu = \frac{2}{3} \quad (4)$

$(2),(4) \to (3): \quad 12 \cdot \frac{3}{4} + 12 \cdot \frac{2}{3} = 17 \iff 9 + 8 = 17$ [wahr]

P liegt zwar in der Ebene ABC, ist aber wegen $\lambda + \mu = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12} > 1$ ein äußerer Punkt des Dreiecks $\langle ABC \rangle$.

(b) $ABC: \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \ \wedge \ \alpha + \beta + \gamma = 1$

ist die baryzentrische Gleichung der Ebene ABC.

Unter Verwendung der Lösung von Teilaufgabe (a) erhalten wir mit $\alpha = 1 - \lambda - \mu$, $\beta = \lambda$, $\gamma = \mu$ für $\vec{P}$ die Darstellung

$$\vec{P} = -\frac{7}{12} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\left(-\frac{7}{12}; \frac{3}{4}; \frac{2}{3}\right)$ sind die baryzentrischen Koordinaten von P.

Übung 13.2

(a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; \ \vec{AC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ Die beiden Vektoren sind linear unabhängig.

$$D \in ABC \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix} -9 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$(1)\quad -2\lambda - 9\mu = -15 \iff 4\lambda + 18\mu = 30$$

$$(2)\quad -4\lambda + 3\mu = 12$$

$$[\,(3)\quad 8\lambda + 9\mu = 6\,]$$

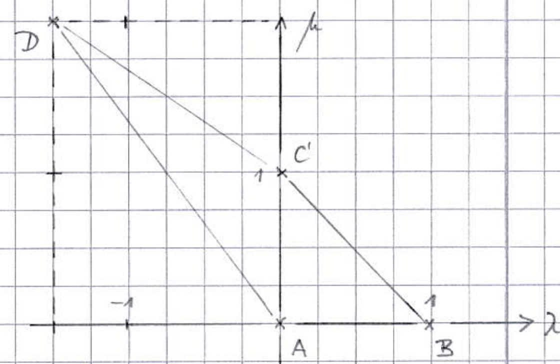
$$(1)+(2):\quad 21\mu = 42 \iff \mu = 2 \quad (4)$$

$$(4)\to(1):\quad -2\lambda - 18 = -15 \iff -2\lambda = 3 \iff \lambda = -\tfrac{3}{2} \quad (5)$$

$$(4),(5)\to(3):\quad 8\cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right) + 9\cdot 2 = 6 \iff -12 + 18 = 6 \quad [\text{wahr!}]$$

D liegt in der Ebene ABC. A, B, C und D sind komplanar.

(b) Die affine Lageskizze zeigt an, dass sich die Diagonalen im Viereck <ABCD> schneiden.



$$P \in ABC \iff \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \begin{pmatrix}-2\\10\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\\-8\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\-4\\8\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-9\\3\\9\end{pmatrix}$$

$$(1)\quad -2\lambda - 9\mu = -8 \iff 4\lambda + 18\mu = 16$$

$$(2)\quad -4\lambda + 3\mu = 5$$

$$[\,(3)\quad 8\lambda + 9\mu = 5\,]$$

$$(1)+(2):\quad 21\mu = 21 \iff \mu = 1 \quad (4)$$

$$(4)\to(1):\quad -2\lambda - 9 = -8 \iff -2\lambda = 1 \iff \lambda = -\tfrac{1}{2} \quad (5)$$

$$(4),(5)\to(3):\quad 8\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 9\cdot 1 = 5 \iff -4 + 9 = 5 \quad [\text{wahr}]$$

P ist ein Punkt von ABC und damit ein Punkt der Ebene, in der das Viereck <ABCD> liegt.

(c) Baryzentrische Gleichung von ABC: $\vec{x} = \alpha\begin{pmatrix}6\\5\\-8\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-3\\8\\1\end{pmatrix} \wedge \alpha+\beta+\gamma = 1$

Aus Teilaufgabe (b) folgt: $\vec{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\5\\-8\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}-3\\8\\1\end{pmatrix}$; $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$ baryz. Koord. von P in ABC.

Baryzentrische Gleichung von ACD: $\vec{x} = \alpha\begin{pmatrix}6\\5\\-8\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-3\\8\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-9\\17\\-2\end{pmatrix}$;

von ABD: $\vec{x} = \alpha\begin{pmatrix}6\\5\\-8\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-9\\17\\-2\end{pmatrix}$; von BCD: $\vec{x} = \alpha\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-3\\8\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-9\\17\\-2\end{pmatrix}$

jeweils mit $\alpha+\beta+\gamma = 1$.

Bereits notiert haben wir, dass $\vec{P} = \frac{1}{2}\vec{A} - \frac{1}{2}\vec{B} + 1 \cdot \vec{C}$ gilt und daher P in der Ebene ABC die baryzentrischen Koordinaten $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$ besitzt.

Aus Teilaufgabe (a) folgt der Reihe nach:

$$\vec{D} = \vec{A} - \frac{3}{2}\vec{AB} + 2\vec{AC} \iff \vec{D} = \frac{1}{2}\vec{A} - \frac{3}{2}\vec{B} + 2\vec{C}$$

$$\iff \vec{C} = -\frac{1}{4}\vec{A} + \frac{3}{4}\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{D}$$

$$\text{bzw.} \iff \vec{A} = 3\vec{B} - 4\vec{C} + 2\vec{D}$$

$$\text{bzw.} \iff \vec{B} = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{4}{3}\vec{C} - \frac{2}{3}\vec{D}$$

Damit erhalten wir:

$$\vec{P} = \frac{1}{2}\vec{A} - \frac{1}{2}\vec{B} + \left(-\frac{1}{4}\vec{A} + \frac{3}{4}\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{D}\right) = \frac{1}{4}\vec{A} + \frac{1}{4}\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{D}$$

P hat in der Ebene ABD die baryzentrischen Koordinaten $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$

$$\vec{P} = \frac{1}{2}\vec{A} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{A} + \frac{4}{3}\vec{C} - \frac{2}{3}\vec{D}\right) + \vec{C} = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{C} + \frac{1}{3}\vec{D}$$

P hat in der Ebene ACD die baryzentrischen Koordinaten $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

$$\vec{P} = \frac{1}{2}\left(3\vec{B} - 4\vec{C} + 2\vec{D}\right) - \frac{1}{2}\vec{B} + \vec{C} = \vec{B} - \vec{C} + \vec{D} -$$

P hat in der Ebene BCD die baryzentrischen Koordinaten $(1; -1; 1)$

(d) P ist ein innerer Punkt des Dreiecks <ABD> und ein innerer Punkt von Dreieck <ACD>, hier sogar der Schwerpunkt. Also ist P ein innerer Punkt des Vierecks <ABCD>. Für diese Feststellung genügt schon der erste Teil der vorangehenden Aussage.

Übung 13.3 Die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ werden als linear unabhängig vorausgesetzt.

$AG: \vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{AG} \iff \vec{x} = \vec{A} + \lambda(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$

$EC: \vec{x} = \vec{E} + \mu \vec{EC} \iff \vec{x} = \vec{A} + \vec{w} + \mu(-\vec{w} + \vec{u} + \vec{v})$

Wir bestimmen den Schnittpunkt der beiden Raumdiagonalen:

$$\vec{A} + \lambda \vec{AG} = \vec{E} + \mu \vec{EC}$$

$$\iff \lambda(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{w} + \mu(-\vec{w} + \vec{u} + \vec{v})$$

$$\iff (\lambda - \mu)\vec{u} + (\lambda - \mu)\vec{v} + (\lambda - 1 + \mu)\vec{w} = \vec{0}$$

Aufgrund des Nullvektorkriteriums für linear unabhängige Vektoren ist die Gleichung nur lösbar, wenn alle drei Koeffizienten verschwinden:

$$(1)\quad \lambda - \mu = 0 \iff \lambda = \mu$$

$$(2)\quad \lambda - \mu = 0 \iff \lambda = \mu$$

$$(3)\quad \lambda - 1 + \mu = 0$$

$$(2) \to (3): \quad \mu - 1 + \mu = 0 \iff \mu = \frac{1}{2}$$

AG und EC schneiden sich im Punkt S mit

$$\vec{S} = \vec{A} + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}).$$

$BH: \vec{x} = \vec{B} + \nu \vec{BH} \iff \vec{x} = \vec{A} + \vec{u} + \nu(-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$

$S \in BH \iff \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \nu(-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$

$\iff \vec{0} = (1 - \nu - \frac{1}{2})\vec{u} + (\nu - \frac{1}{2})\vec{v} + (\nu - \frac{1}{2})\vec{w}$

$\iff \nu = \frac{1}{2}$

$FD: \vec{x} = \vec{F} + \rho \vec{FD} \iff \vec{x} = \vec{A} + \vec{u} + \vec{w} + \rho(-\vec{u} - \vec{w} + \vec{v})$

$S \in FD \iff \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{w} + \rho(-\vec{u} - \vec{w} + \vec{v})$

$\iff \vec{0} = (1 - \rho - \frac{1}{2})\vec{u} + (\rho - \frac{1}{2})\vec{v} + (1 - \rho - \frac{1}{2})\vec{w}$

$\iff \rho = \frac{1}{2}$

Der Punkt S liegt auch auf den Raumdiagonalen BH und FD. S ist der Mittelpunkt aller vier Raumdiagonalen. S teilt sie daher jeweils im Verhältnis 1:1.

Übung 13.4

Weil A, B, D und E nicht komplanar sind, müssen $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sein.

$$AG: \vec{x} = \vec{A} + \lambda \overrightarrow{AG} \iff \vec{x} = \vec{A} + \lambda(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

$$MC: \vec{x} = \vec{M} + \mu \overrightarrow{MC} \iff \vec{x} = \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{w} + \mu\left(-\frac{1}{2}\vec{w} + \vec{u} + \vec{v}\right)$$

Wir untersuchen AG und MC auf gemeinsame Punkte:

$$\vec{A} + \lambda(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{w} + \mu\left(-\frac{1}{2}\vec{w} + \vec{u} + \vec{v}\right)$$

$$\iff (\lambda - \mu)\vec{u} + (\lambda - \mu)\vec{v} + \left(\lambda - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu\right)\vec{w} = \vec{O}$$

Nach dem Nullvektorkriterium für linear unabhängige Vektoren, ist die Gleichung nur erfüllt, wenn alle drei Koeffizienten verschwinden:

$$(1)\quad \lambda - \mu = 0 \iff \lambda = \mu$$

$$(2)\quad \lambda - \mu = 0 \iff \lambda = \mu$$

$$(3)\quad \lambda - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu = 0$$

$$(2) \to (3):\ \lambda - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda = 0 \iff \frac{3}{2}\lambda = \frac{1}{2} \iff \lambda = \frac{1}{3}$$

Die beiden Geraden schneiden sich in genau einem Punkt S, der sowohl $\overline{AG}$ als auch $\overline{MC}$ im Verhältnis 1 : 2 teilt.

Übung 13.5

Da die Punkte A, B, C, D als nicht komplanar vorausgesetzt sind, müssen die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ linear unabhängig sein.

Unter Verwendung des Ergebnisses von Übung 8.8 erhalten wir:

$$\vec{S} = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{B} + \frac{1}{3}\vec{C} = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{x}) + \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{y}) = \vec{A} + \frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y}$$

$$\vec{T} = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{B} + \frac{1}{3}\vec{D} = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{x}) + \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{z}) = A + \frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{z}$$

$$\vec{U} = \frac{1}{3}\vec{B} + \frac{1}{3}\vec{C} + \frac{1}{3}\vec{D} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{x}) + \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{y}) + \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{z}) = \vec{A} + \frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{z}$$

$$\vec{V} = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{C} + \frac{1}{3}\vec{D} = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{y}) + \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{z}) = \vec{A} + \frac{1}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{z}$$

Wir untersuchen die Geraden DS und CT auf gemeinsame Punkte.

$$\vec{D} + \lambda \overrightarrow{DS} = \vec{C} + \mu \overrightarrow{CT}$$

$$\Leftrightarrow \vec{A} + \vec{z} + \lambda\left(-\vec{A} - \vec{z} + \vec{A} + \frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y}\right) = \vec{A} + \vec{y} + \mu\left(-\vec{A} - \vec{y} + \vec{A} + \frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \vec{z} + \lambda\left(\frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} - \vec{z}\right) = \vec{y} + \mu\left(\frac{1}{3}\vec{x} - \vec{y} + \frac{1}{3}\vec{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu\right)\vec{x} + \left(\frac{1}{3}\lambda + \mu - 1\right)\vec{y} + \left(1 - \lambda - \frac{1}{3}\mu\right)\vec{z} = \vec{O}$$

Wir wenden das Nullvektorkriterium für linear unabhängige Vektoren an:

$$(1)\quad \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \mu$$

$$(2)\quad \frac{1}{3}\lambda + \mu - 1 = 0$$

$$(3)\quad 1 - \lambda - \frac{1}{3}\mu = 0$$

$$(1) \rightarrow (2)\quad \frac{1}{3}\mu + \mu - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{3}\mu = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{3}{4}$$

$$(1) \rightarrow (3)\quad 1 - \lambda - \frac{1}{3}\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{4}{3}\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{3}{4}$$

DS und CT schneiden sich in genau einem Punkt Z

Z teilt DS sowie CT im Verhältnis 3 : 1

$$\vec{Z} = \vec{D} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DS} = \vec{A} + \vec{z} + \frac{3}{4}\left(-\vec{z} + \frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y}\right) = \vec{A} + \frac{1}{4}\vec{x} + \frac{1}{4}\vec{y} + \frac{1}{4}\vec{z}$$

Weiterhin gilt:

$$\vec{A} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AU} = \vec{A} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{z}\right) = \vec{A} + \frac{1}{4}\vec{x} + \frac{1}{4}\vec{y} + \frac{1}{4}\vec{z} = \vec{Z}$$

$$\vec{B} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BV} = \vec{A} + \vec{x} + \frac{3}{4}\left(-\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{z}\right) = \vec{A} + \frac{1}{4}\vec{x} + \frac{1}{4}\vec{y} + \frac{1}{4}\vec{z} = \vec{Z}$$

Also liegt Z auch auf den Geraden AU und BV; Z teilt die Strecken $\overline{AU}$ und $\overline{BV}$ ebenfalls im Verhältnis 3 : 1.

Übung 13.6

In der Darstellung $\vec{P} = \vec{A} + \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AB}$ gelte $\lambda, \mu, \lambda+\mu \in [0;1]$

$$\vec{P} = \vec{B} + \rho\, \vec{BC} + \sigma\, \vec{BA}$$
$$= (\vec{A} + \vec{AB}) + \rho(\vec{BA} + \vec{AC}) - \sigma \vec{AB}$$
$$= \vec{A} + (1-\rho-\sigma)\vec{AB} + \rho \vec{AC}$$

Da die Darstellung von $\vec{P}$ in der Ebene $ABC: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$ wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ eindeutig ist folgt: $\lambda = 1-\rho-\sigma$ und $\mu = \rho$

Daraus ergibt sich wiederum:

(1) $0 \le 1-\rho-\sigma \le 1 \iff -1 \le -\rho-\sigma \le 0 \iff 1 \ge \rho+\sigma \ge 0$

(2) $0 \le \rho \le 1$

(3) $0 \le (1-\rho-\sigma)+\rho \le 1 \iff 0 \le 1-\sigma \le 1 \iff 1 \ge \sigma \ge 0$

Übung 13.7

„$\Rightarrow$": A, B, C nicht kollinear

$[\iff \vec{AB}$ und $\vec{AC}$ sind linear unabhängig$]$

$\Rightarrow \vec{S} := \vec{A} + \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ ist

(13.8) $= \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{B} + \frac{1}{3}\vec{C}$ ist ein innerer Punkt von $\langle ABC \rangle$

$\Rightarrow$ Das Innere von $\langle ABC \rangle$ ist nicht leer.

„$\Leftarrow$": (Kontraposition!)

A, B und C seien kollinear, aber paarweise verschieden (sonst kein Dreieck!).

$\Rightarrow C \in AB \Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\vec{AC} = \gamma \vec{AB} \Rightarrow \vec{C} = (1-\gamma)\vec{A} + \gamma \vec{B}$

Sei nun P ein Punkt der Dreiecksfläche. Dann gibt es $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{P} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B} + \nu\vec{C} \wedge \lambda+\mu+\nu = 1$

$\Rightarrow \vec{P} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B} + \nu((1-\gamma)\vec{A} + \gamma\vec{B}) = (\lambda+\nu-\nu\gamma)\vec{A} + (\mu+\gamma)\vec{B} + 0 \cdot \vec{C}$

$\Rightarrow P$ liegt auf dem Rand des Dreiecks.

Also ist das Innere des Dreiecks leer, wenn A, B, C kollinear sind.