

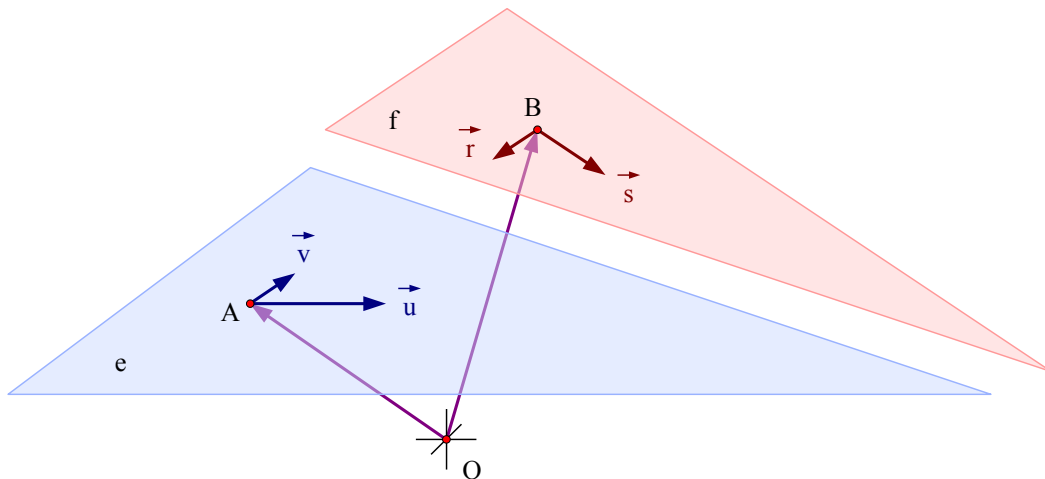


§12 Lagebeziehungen zwischen Ebenen

Bei der Untersuchung der Lagebeziehung zwischen zwei Geraden oder der Untersuchung der Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene werden gemäß §6 beziehungsweise §11 zwei analytische Kriterien verwendet:

- (1) Die Abhängigkeit der Richtungsvektoren
- (2) Die Beschaffenheit der Schnittmenge

Es ist naheliegend, diese beiden Kriterien auch zur Unterscheidung der Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen zu bemühen.



Unter Bezug auf das Identitätskriterium für Ebenen (siehe Satz (9.10)) definieren wir analog zur Definition der Parallelität von Geraden beziehungsweise der Definition der Parallelität von Gerade und Ebene:

(12.1) Definition

Gegeben seien zwei Ebenen $e: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ und $f: \vec{X} = \vec{B} + \rho \vec{r} + \sigma \vec{s}$, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen: $e \cap f = \emptyset$

Die Ebenen heißen *parallel*, wenn beide Richtungsvektoren einer der beiden Ebenen Linearkombinationen der Richtungsvektoren der anderen Ebene sind; andernfalls heißen die Ebenen e und f *windschief*.

Es sei an dieser Stelle unter Hinweis auf Satz (9.8) nochmals hervorgehoben, dass auch umgekehrt die Richtungsvektoren der anderen Ebene Linearkombinationen der Richtungsvektoren der einen sind, wenn die in der Definition (12.1) formulierte Parallelitätsbedingung erfüllt ist.

Wie bei Gerade und Ebene wird auch hier zunächst aus Gründen der mathematischen Vollständigkeit ein Phänomen erfasst, das anschaulich unrealisierbar erscheint. Dass es im \mathbb{R}^3 tatsächlich keine windschiefen Ebenen gibt, zeigt der folgende Satz.

(12.2) Satz

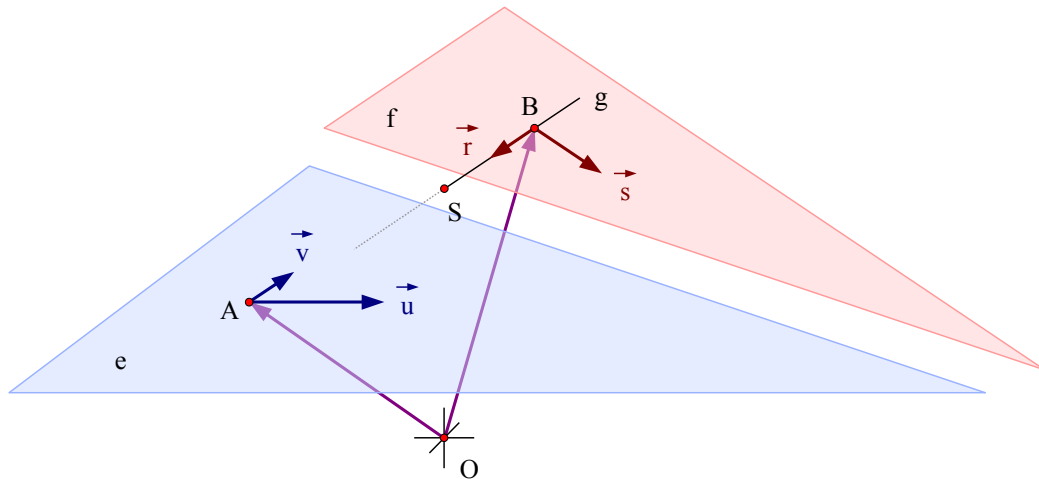
Gegeben seien zwei Ebenen $e: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ und $f: \vec{X} = \vec{B} + \rho \vec{r} + \sigma \vec{s}$.

Ist (wenigstens) einer der beiden Richtungsvektoren einer der beiden Ebenen keine Linearkombination der Richtungsvektoren der anderen Ebene, so besitzen die Ebenen e und f mindestens einen gemeinsamen Punkt.

Beweis:

Sei o.B.d.A. der Vektor \vec{r} der Ebene f keine Linearkombination der Vektoren \vec{u} und \vec{v} .

Wir betrachten die Gerade $g: \vec{X} = \vec{B} + \rho \vec{r}$. Da sie den Stützpunkt B der Ebene f enthält und ihr Richtungsvektor trivialerweise eine Linearkombination der Richtungsvektoren \vec{r} und \vec{s} ist, liegt die Gerade g ganz in der Ebene f .



Der Vektor \vec{r} ist gemäß Voraussetzung keine Linearkombination der Vektoren \vec{u} und \vec{v} ; also muss die Gerade g die Ebene e in genau einem Punkt S schneiden.

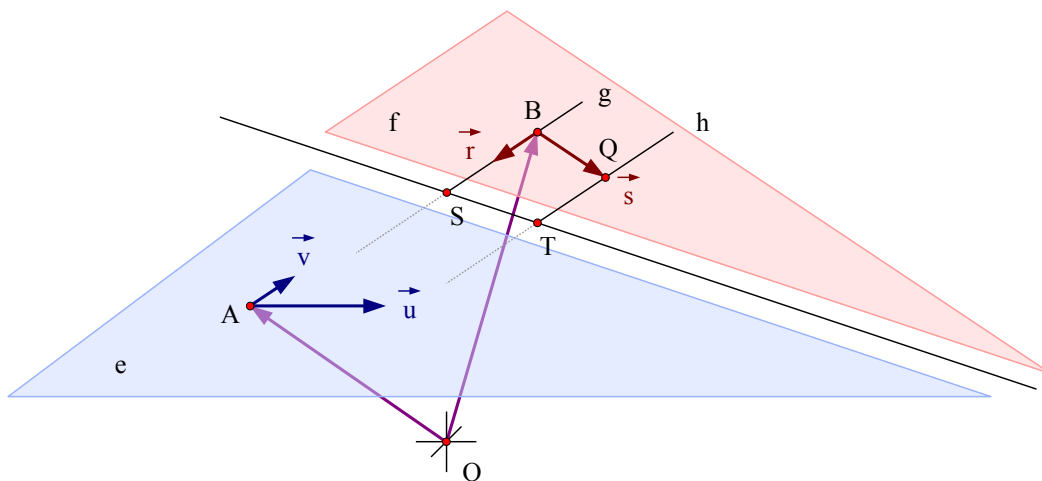
Da die Gerade g ganz in der Ebene f liegt, muss der Punkt S auch zur Ebene f gehören. S ist folglich ein gemeinsamer Punkt der Ebenen e und f .

Nachdem gesichert ist, dass die Schnittmenge nicht leer sein kann, wenn nicht beide Richtungsvektoren der einen Ebene durch die Richtungsvektoren der anderen Ebene linear kombiniert werden können, präzisieren wir nun die Form der Schnittmenge:

(12.3) Satz

Gegeben seien zwei Ebenen $e: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ und $f: \vec{X} = \vec{B} + \rho \vec{r} + \sigma \vec{s}$.

Ist (wenigstens) einer der beiden Richtungsvektoren einer der beiden Ebenen keine Linearkombination der Richtungsvektoren der anderen Ebene, so schneiden sich die Ebenen e und f in einer Geraden.



Beweis:

Wir nehmen wieder o.B.d.A. an, dass der Vektor \vec{r} der Ebene f keine Linearkombination der Vektoren \vec{u} und \vec{v} ist, und betrachten wieder die Gerade $g: \vec{X} = \vec{B} + \rho \vec{r}$ aus dem Beweis zu Satz (12.2).

Außerdem betrachten wir den Punkt Q gegeben durch $\vec{Q} = \vec{B} + \vec{s}$. Der Punkt Q ist ein Punkt der Ebene f , aber kein Punkt der Geraden g , weil die Richtungsvektoren \vec{r} und \vec{s} linear unabhängig sind.

Wir betrachten die Gerade $h: \vec{X} = \vec{Q} + \sigma \vec{r}$. Konstruktionsgemäß liegt die Gerade h parallel zur Geraden g in der Ebene f . So wie die Gerade g die Ebene e in einem Punkt S schneidet, liefert die Gerade h in der Ebene e einen Schnittpunkt T .



T ist so wie der Punkt S ein gemeinsamer Punkt der Ebenen e und f. T kann nicht mit S übereinstimmen, weil g und h parallel sind.

Also enthalten die Ebenen e und f zwei verschiedene Punkte S und T. Wegen des Linearitätssatzes muß bereits die ganze Gerade ST sowohl zur Ebene e als auch zur Ebene f gehören.

Zu untersuchen bleibt, ob auch Punkte außerhalb der Geraden ST zur Schnittmenge der Ebenen e und f gehören können.

Sei Z irgendein Punkt, der nicht zu ST gehört. Dann sind die drei Punkte S, T, Z nicht kollinear. Würde Z zur Schnittmenge gehören, wären die Ebenen e und f auf Grund des Identitätssatzes identisch, weil sie dann in drei nicht kollinearen Punkten übereinstimmen. Dann könnten aber auch die Richtungsvektoren wechselseitig linear kombiniert werden, was der Voraussetzung des Satzes widerspricht. Außerhalb der Geraden ST kann es also keinen weiteren gemeinsamen Punkt der Ebenen e und f geben.

Die Untersuchungsergebnisse können wiederum in einem Analyseraster zusammengefasst werden.

(12.4) Analyseraster

Gegeben seien zwei Ebenen $e : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ und $f : \vec{X} = \vec{B} + \rho \vec{r} + \sigma \vec{s}$. Dann gilt:

Die Richtungsvektoren von f sind Linearkombinationen der Richtungsvektoren von e		wahr	falsch
		Der Stützpunkt von f gehört zu e	
wahr	falsch	e und f schneiden sich in einer Geraden	
e = f	e f		

Wir zeigen abschließend, wie die Berechnung einer Schnittgeraden zweier sich schneidenden Ebene erfolgen kann.

12.5 Beispiel

Gegeben sind die beiden Ebenen $e : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $f : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Zeige, dass sich die beiden Ebenen in einer Geraden schneiden, und gib für die Schnittgerade eine Punkt-richtungsgleichung an.

Lösung:

Wir untersuchen zunächst die Richtungsvektoren.

$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist eine Kombination der Richtungsvektoren von e, falls $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Zu lösen ist das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 & [\quad (1) \quad \quad \quad -5\lambda + \mu = 1 \quad] \\
 & \quad \quad (2) \quad \quad \quad \lambda + 3\mu = -3 \quad \Leftrightarrow \quad 2\lambda + 6\mu = -6 \\
 & \quad \quad (3) \quad \quad \quad -2\lambda + 4\mu = -2 \\
 & (2) + (3) \quad \quad \quad 10\mu = -8 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -\frac{4}{5} \quad (4) \\
 & (4) \rightarrow (2) \quad \quad \quad \lambda + 3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{5} \quad (5) \\
 & (4),(5) \rightarrow (1) \quad \quad \quad -5 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) = 1 \quad [\text{falsch}]
 \end{aligned}$$



Ein Richtungsvektor der Ebene f ist keine Linearkombination der Richtungsvektoren der Ebene e . Also schneiden sich die beiden Ebenen gemäß Satz (12.3) in einer Geraden.

Die folgenden Bemühungen haben das Ziel, eine Punkttrichtungsgleichung der Schnittgeraden zu ermitteln. Gedanklicher Ausgangspunkt ist die Tatsache, dass es für jeden Punkt X der Schnittgeraden Parameterwerte $\lambda, \mu, \rho, \sigma \in \mathbb{R}$ geben muss, mit denen X aus den Parametergleichungen der beiden Ebenen gewonnen werden kann. Dieser Ansatz führt auf die „Schnittpunktgleichung“

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und über diese auf ein „unterbestimmtes“ lineares Gleichungssystem, das aus drei Gleichungen mit vier Variablen besteht.

Es ist sofort klar, dass die bekannte Lösungstechnik des schrittweise Eliminierens und Resubstituierens nicht auf genau ein Lösungsquadrupel $(\lambda; \mu; \rho; \sigma)$ führen kann.

Stattdessen wird das Verfahren, nachdem zwei Variablen eliminiert sind, auf eine lineare Beziehung zwischen zwei Variablen hinauslaufen.

Wird der Prozess so gesteuert, dass diese verbleibende lineare Gleichung die beiden Parameter enthält, die zur selben Ebenengleichung gehören, also beispielsweise λ und μ , so kann aus der zugehörigen Ebenengleichung eine Geradengleichung gefiltert werden.

Wir passen die Darstellung des Gleichungssystems an diese Vorüberlegung an:

$$\begin{aligned} (1) \quad & -5\lambda + \mu = \rho + \sigma - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5\lambda - \mu = -\rho - \sigma + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 20\lambda - 4\mu = -4\rho - 4\sigma + 4 \\ (2) \quad & \lambda + 3\mu = -3\rho + \sigma - 7 \\ (3) \quad & -2\lambda + 4\mu = -2\rho + 4\sigma + 2 \end{aligned}$$

Wir erzeugen zunächst zwei Gleichungen, in denen die Variable σ eliminiert ist:

$$(1) + (2) \quad 6\lambda + 2\mu = -4\rho - 6 \quad \Leftrightarrow \quad 18\lambda + 6\mu = -12\rho - 18 \quad (4)$$

$$(1) + (3) \quad 18\lambda + 0\mu = -6\rho + 6 \quad \Leftrightarrow \quad -36\lambda = 12\rho - 12 \quad (5)$$

Nun eliminieren wir die Variable ρ :

$$(4) + (5) \quad -18\lambda + 6\mu = -30 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3\lambda - 5$$

Unter Verwendung dieser Beziehung erhalten wir aus der Ebenengleichung von e die Gleichung der Schnittgeraden g :

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (3\lambda - 5) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \cdot 1 \\ -5 \cdot 3 \\ -5 \cdot 4 \end{pmatrix} \\ & \quad \Leftrightarrow \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -15 \\ -22 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Bearbeitung des Gleichungssystems hätte auch das Ziel verfolgen können, die Variablen λ und μ zu eliminieren. Das Ergebnis wäre eine lineare Beziehung zwischen den Variablen ρ und σ gewesen. Diese hätte dann mit Hilfe der Gleichung der Ebene f auf eine andere (!) Gleichung derselben (!) Schnittgeraden geführt.

Auf eine weitere Analyse des Vorgehens wird verzichtet, weil in einem der folgenden Paragraphen eine vektorielle Darstellung von Ebenen entwickelt werden wird, mit denen Untersuchungen von Lagebeziehungen erheblich einfacher vonstatten gehen.