Übung 12.1

(a) $ABC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$

$P \in ABC \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} 3 \\ -21 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$

$$(1) \quad -5\lambda - 13\mu = -5$$
$$[\,(2) \quad 6\lambda + 3\mu = -21\,]$$
$$(3) \quad 3\lambda + 13\mu = 9$$

$(1)+(3): \quad -2\lambda = 4 \iff \lambda = -2 \quad (4)$

$(4) \to (1): \quad 10 - 13\mu = -5 \iff \mu = \frac{15}{13} \quad (5)$

$(4),(5) \to (2): \quad 6 \cdot (-2) + 3 \cdot \frac{15}{13} = -21$ [falsch] $\quad P \notin ABC$

(b) $f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -21 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$

Übung 12.2

(a)

$$(1) \quad 3\lambda - \mu = 13 \iff 6\lambda - 2\mu = 26$$
$$(2) \quad -\lambda + 2\mu = 4$$
$$[\,(3) \quad -4\lambda + 5\mu = 1\,]$$

$(1)+(2): \quad 5\lambda = 30 \iff \lambda = 6 \quad (4)$

$(4) \to (2): \quad -6 + 2\mu = 4 \iff \mu = 5 \quad (5)$

$(4),(5) \to (3): \quad -4 \cdot 6 + 5 \cdot 5 = 1$ [wahr]

Der erste Richtungsvektor von f ist eine Kombination der Richtungsvektoren von e. Wir untersuchen daher den zweiten:

$$(1) \quad 3\lambda - \mu = -3 \iff 6\lambda - 2\mu = -6$$
$$(2) \quad -\lambda + 2\mu = -4$$
$$[\,(3) \quad -4\lambda + 5\mu = -7\,]$$

$(1)+(2): \quad 5\lambda = -10 \iff \lambda = -2 \quad (4)$

$(4) \to (2): \quad 2 + 2\mu = -4 \iff \mu = -3 \quad (5)$

$(4),(5) \to (3): \quad -4 \cdot (-2) + 5 \cdot (-3) = -7$ [wahr]

Auch der zweite Richtungsvektor von f ist eine Linearkombination der Richtungsvektoren der Ebene e.

e und f sind parallel oder identisch. Punktprobe:

$$(1)\quad 3\lambda - \mu = 5 - 9 \iff 6\lambda - 2\mu = -8$$

$$(2)\quad -\lambda + 2\mu = 1$$

$$[(3)\quad -4\lambda + 5\mu = -1 + 2\ ]$$

$$(1)+(2):\quad 5\lambda = -7 \iff \lambda = -\frac{7}{5} \qquad (4)$$

$$(4)\to(2):\quad \frac{7}{5} + 2\mu = 1 \iff 2\mu = -\frac{2}{5} \iff \mu = -\frac{1}{5} \quad (5)$$

$$(4),(5)\to(3):\quad -4\cdot\left(-\frac{7}{5}\right) + 5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = 1 \iff \frac{23}{5} = 1 \quad [\text{falsch!}]$$

Die Ebenen e und f sind parallel.

(b)

$$[\ (1)\quad 3\lambda + \mu = -2\ ]$$

$$(2)\quad -2\lambda + 3\mu = 3$$

$$(3)\quad -\lambda + 3\mu = 7$$

$$(2)-(3):\quad -\lambda = -4 \iff \lambda = 4 \qquad (4)$$

$$(4)\to(3):\quad -4 + 3\mu = 7 \iff 3\mu = 11 \iff \mu = \frac{11}{3} \quad (5)$$

$$(4),(5)\to(1):\quad 3\cdot 4 + \frac{11}{3} = -2 \quad [\text{falsch}]$$

Da der erste Richtungsvektor der Ebene f keine Linearkombination der Richtungsvektoren der Ebene e ist, müssen sich e und f in einer Geraden schneiden.

$$(1)\quad 3\lambda + \mu + 15 = -2\rho - 14\sigma \iff -9\lambda - 3\mu - 45 = 6\rho + 42\sigma$$

$$(2)\quad -2\lambda + 3\mu + 11 = +3\rho - 4\sigma$$

$$(3)\quad -\lambda + 3\mu - 10 = +7\rho + 7\sigma$$

$$(2)-(3):\quad -\lambda + 21 = -4\rho - 11\sigma \iff 11\lambda - 231 = 44\rho + 121\sigma \qquad (4)$$

$$(1)+(2):\quad -11\lambda - 34 = 9\rho + 38\sigma \qquad (5)$$

$$(4)+(5):\quad -265 = 53\rho + 159\sigma \iff -5 = \rho + 3\sigma$$

$$\iff \rho = -3\sigma - 5$$

$$g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}-21\\-8\\8\end{pmatrix} + (-3\sigma-5)\begin{pmatrix}-2\\3\\7\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-14\\-4\\7\end{pmatrix} \iff \vec{X} = \begin{pmatrix}-11\\-23\\-27\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-8\\-13\\-14\end{pmatrix}$$

(c) $(1)\quad 4\lambda - 5\mu = 7$

$(2)\quad +7\mu = -21 \iff \mu = -3$

$[\,(3)\quad -3\lambda + 5\mu = -9\,]$

$(2) \to (1)\quad 4\lambda - 5\cdot(-3) = 7 \iff 4\lambda = -8 \iff \lambda = -2 \quad (4)$

$(2),(4) \to (3)\quad -3\cdot(-2) + 5\cdot(-3) = -9 \quad$ [wahr]

Der erste Richtungsvektor von f ist abhängig von den Richtungsvektoren von e.

$(1)\quad 4\lambda - 5\mu = 19$

$(2)\quad 7\mu = 7 \iff \mu = 1$

$[\,(3)\quad -3\lambda + 5\mu = -13\,]$

$(2) \to (1):\quad 4\lambda - 5 = 19 \iff 4\lambda = 24 \iff \lambda = 6 \quad (4)$

$(2),(4) \to (3):\quad -3\cdot 6 + 5\cdot 1 = -13 \quad$ [wahr]

Auch der zweite Richtungsvektor von f ist abhängig von den Richtungsvektoren von e.

Punktprobe:

$(1)\quad 4\lambda - 5\mu = 12$

$(2)\quad 7\mu = -28 \iff \mu = -4$

$[\,(3)\quad -3\lambda + 5\mu = -14\,]$

$(2) \to (1):\quad 4\lambda - 5\cdot(-4) = 12 \iff 4\lambda = -8 \iff \lambda = -2 \quad (4)$

$(2),(4) \to (3):\quad -3\cdot(-2) + 5\cdot(-4) = -14 \quad$ [wahr]

Der Stützpunkt von f ist ein Punkt der Ebene e. Also gilt $e = f$.

(d) Der zweite Richtungsvektor von f ist linear unabhängig von den Richtungsvektoren von e. Also schneiden sich e und f in einer Geraden g.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein gemeinsamer Richtungsvektor von f und e und daher ein Richtungsvektor von g.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist offenbar ein gemeinsamer Punkt von f und e.

Also gilt: $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Übung 12.3

$$(1)\quad -2\lambda + \mu = -15$$

$$(2)\quad 2\lambda = 2 \iff \lambda = 1$$

$$[(3)\quad -\lambda + 3\mu = -4]$$

$$(2)\to(1)\quad -2 + \mu = -15 \iff \mu = -13 \quad (4)$$

$$(2),(4)\to(3):\quad -1 + 3\cdot(-13) = -4 \quad [\text{falsch!}]$$

Ein Richtungsvektor der Ebene f ist linear unabhängig von den Richtungsvektoren der Ebene e. e und f schneiden sich in einer Geraden g.

$$(1)\quad -2\lambda + \mu + 8 = -15\rho \iff 6\lambda - 3\mu - 24 = 45\rho$$

$$(2)\quad 2\lambda + 8 = 2\rho - 2\sigma \iff 10\lambda + 40 = 10\rho - 10\sigma$$

$$(3)\quad -\lambda + 3\mu - 10 = -4\rho + 4\sigma$$

$$(1)+(3):\quad 5\lambda - 34 = 41\rho + 4\sigma \iff -10\lambda + 68 = -82\rho - 8\sigma \quad (4)$$

$$(2)+(4)\quad 108 = -72\rho - 18\sigma \iff \sigma = -4\rho - 6$$

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-7\\6\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}-15\\2\\-4\end{pmatrix} + (-4\rho-6)\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix} \iff \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\5\\-18\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}-15\\10\\-20\end{pmatrix}$$

Wir prüfen, ob $T = (4;1;-10)$ auf g liegt.

$$\begin{pmatrix}4\\1\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\5\\-18\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}-15\\10\\-20\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}6\\-4\\8\end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix}-15\\10\\-20\end{pmatrix} \iff \rho = -\frac{2}{5}$$

T liegt auf g!

Übung 12.4

(a) Wir untersuchen die Richtungsvektoren von e_t.

$$\begin{pmatrix}-3t\\-5\\-3t\end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix}6\\-2t\\-9\end{pmatrix} \qquad \text{Für } t=0:\ \begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix}6\\0\\-9\end{pmatrix} \quad [\text{nicht lösbar}]$$

Für $t \neq 0$ folgt aus der 1. Koordinate $\sigma = -\frac{1}{2}t$.

Mit diesem Parameterwert werden aber die Gleichungen für die beiden anderen Koordinaten nicht gelöst.

Die Richtungsvektoren sind daher linear unabhängig $\forall t \in \mathbb{R}$.

(b) (1) $6\mu = -3t \iff \mu = -\frac{1}{2}t$

(2) $-3\lambda + \mu = -5$

[(3) $5\lambda - 4\mu = -3t$]

(1) → (2): $-3\lambda - \frac{1}{2}t = -5 \iff -3\lambda = \frac{1}{2}t - 5 \iff \lambda = -\frac{1}{6}t + \frac{5}{3}$ (4)

(1), (4) → (3): $5\left(-\frac{1}{6}t + \frac{5}{3}\right) - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}t\right) = -3t$

$\iff -\frac{5}{6}t + \frac{25}{3} + 2t = -3t$

$\iff \frac{25}{6}t = -\frac{25}{3} \iff t = -2$

(Nur!) Für $t=-2$ ist der erste Richtungsvektor von e_t linear abhängig von den Richtungsvektoren der Ebene f.

Wir prüfen, ob für diesen Wert von t das auch für den zweiten Richtungsvektor von e_t richtig ist:

(1) $6\mu = 6 \iff \mu = 1$

(2) $-3\lambda + \mu = 4$

[(3) $5\lambda - 4\mu = -9$]

(1) → (2): $-3\lambda + 1 = 4 \iff -3\lambda = 3 \iff \lambda = -1$ (4)

(1), (4) → (3): $5\cdot(-1) - 4\cdot 1 = -9$ [wahr!]

Für $t=-2$ sind f und e_t parallel oder identisch.

Punktprobe:

(1) $6\mu = -2 - 4 \iff \mu = -1$

(2) $-3\lambda + \mu = -5 + 1$

[(3) $5\lambda - 4\mu = 7 + 2$]

(1) → (2): $-3\lambda - 1 = -4 \iff \lambda = 1$ (4)

(1), (4) → (3): $5\cdot 1 - 4\cdot(-1) = 9$ [wahr]

Für $t=-2$ sind f und e_t identisch. Es gibt also keinen Wert für den Scharparameter t, für den f und e_t parallel sind.

(c) Aus Teilaufgabe (b) geht bereits hervor, dass sich die Ebenen f und e_0 in einer Geraden g schneiden.

$$(1)\quad 6\mu - 4 = 6\sigma \iff 42\mu - 28 = 42\sigma$$

$$(2)\quad -3\lambda + \mu + 4 = -5\rho \iff -15\lambda + 5\mu + 20 = -25\rho$$

$$(3)\quad 5\lambda - 4\mu - 9 = -9\sigma \iff 15\lambda - 12\mu - 27 = -27\sigma$$

$$(2)+(3):\quad -7\mu - 7 = -25\rho - 27\sigma \iff -42\mu - 42 = -150\rho - 162\sigma \quad (4)$$

$$(1)+(4):\quad -70 = -150\rho - 120\sigma \iff \sigma = -\frac{5}{4}\rho + \frac{7}{12}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{5}{4}\rho + \frac{7}{12}\right) \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} \iff \vec{x} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -5 \\ 7/4 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -15/2 \\ -5 \\ 45/4 \end{pmatrix}$$

Für $\rho = 1$ erhalten wir den Geradenpunkt P mit $\vec{p} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 13 \end{pmatrix}$ und durch Verwendung von P als Stützpunkt eine bruchfreie (ganzzahlige) Darstellung von g:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 13 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -30 \\ -20 \\ 45 \end{pmatrix}$$

<u>Übung 12.5</u>

(a) Die Gleichung $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$ verlangt zur Lösung in der 1. Koordinate $\mu = 5$ und in der 3. Koordinate $\mu = -1$. Also ist sie nicht lösbar.

Die gegebene Punktrichtungsgleichung beschreibt eine Ebene, weil ihre Richtungsvektoren $\forall t \in \mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

(b) Wir betrachten die Punktrichtungsgleichungen von e_s und e_t für $s \neq t$.

$$(1)\quad 5\lambda + \mu = 1 \qquad\qquad (4) \to (1): \mu = 1 \quad (5)$$

$$[(2)\quad 2\lambda + t\mu = s] \qquad\qquad (4),(5) \to (2): t \cdot 1 = s \quad [\text{falsch!}]$$

$$(3)\quad \lambda + (-1)\mu = -1$$

Der 2. RV von e_s ist keine

$$(1)+(3)\quad 6\lambda = 0 \iff \lambda = 0 \quad (4)$$

Kombination der RV von e_t!

(c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist in allen Ebenen e_t enthalten.