



§11 Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen

Der Linearitätssatz für Ebenen (9.12) hat gezeigt, dass eine Gerade vollständig innerhalb einer Ebene liegen kann. Sein Beweis deutet an, unter welchen Bedingungen es zu dieser Lagebeziehung kommt:

(11.1) Satz

Gegeben seien eine Ebene $e: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ und eine Gerade $g: \vec{X} = \vec{B} + \rho \vec{w}$.

Die Gerade g liegt genau dann ganz in der Ebene e , wenn mindestens einer ihrer Punkte auch der Ebene angehört und ihr Richtungsvektor eine Linearkombination der Richtungsvektoren der Ebene ist:

$$g \subseteq e \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g \cap e \neq \emptyset \\ \vec{w} \text{ ist Linearkombination von } \vec{u} \text{ und } \vec{v} \end{array} \right\}$$

Beweis:

\Rightarrow :

Sei g eine Teilmenge von e .

Dann gehört der Stützpunkt B von g zu e . Also gilt sicher $g \cap e \neq \emptyset$.

Sei der Punkt Q definiert durch $\vec{Q} = \vec{B} + \vec{w}$. Dann gehört Q zu g und damit auch zu e .

Also ist $\vec{w} = -\vec{B} + \vec{Q} = \vec{BQ}$ ein Richtungsvektor von e und damit eine Linearkombination von \vec{u} und \vec{v} .

\Leftarrow :

Mögen nun die beiden Bedingungen gelten.

Dann gibt es einen gemeinsamen Punkt Q von g und e .

Sei S definiert durch $\vec{S} = \vec{Q} + \vec{w}$. Dann ist S ein Punkt von g .

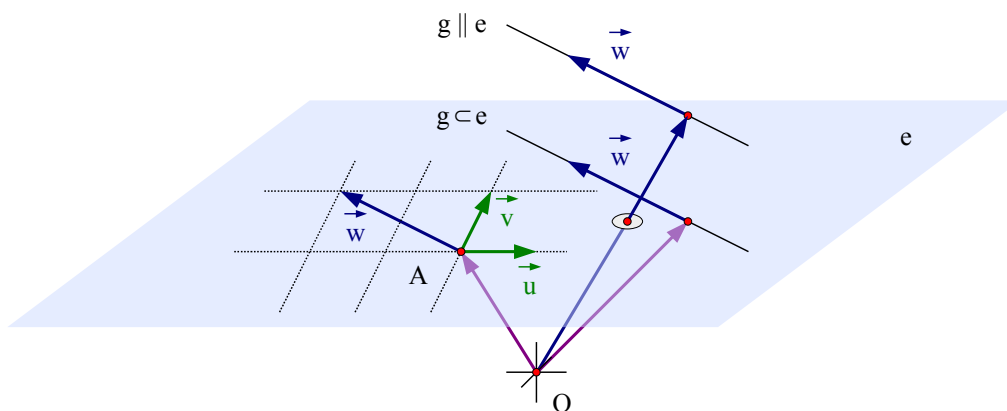
Da nach Voraussetzung Skalare λ und μ mit der Eigenschaft $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ existieren, folgt $\vec{QS} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$.

Also ist S gemäß dem Richtungskriterium für Ebenenpunkte auch ein Punkt von e .

Da nun g und e zwei verschiedene Punkte Q und S gemeinsam haben, muss nach dem Linearitätssatz die Gerade g ganz in e liegen.

Die Untersuchung der Inklusionsbeziehung zwischen einer Geraden und einer Ebenen zeigt, dass es wie bei der Untersuchung der Lagebeziehung zweier Geraden zwei analytische Kriterien gibt:

- (1) Die Schnittmenge ist leer oder nicht leer.
- (2) Der Richtungsvektor der Geraden ist eine Linearkombination der Richtungsvektoren der Ebene oder nicht.



Ausgehend von dieser Erkenntnis definieren wir die übrigen Lagebeziehungen:



(11.2) Definition

Gegeben seien eine Ebene $e: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ und eine Gerade $g: \vec{X} = \vec{B} + \rho \vec{w}$, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

Wir sagen, g verläuft *parallel* zu e , falls der Richtungsvektor der Geraden \vec{w} eine Linearkombination der Richtungsvektoren der Ebene \vec{u} und \vec{v} und ist; andernfalls sagen wir, g ist *windschief* zu e .

Es erscheint auf den ersten Blick verwunderlich, dass in dieser Definition ein Begriff geprägt wird, der anschaulich nicht realisierbar zu sein scheint. Es ist aber gerade Aufgabe einer Theorie zu zeigen, dass Verknüpfungen von Bedingungen nicht erfüllbar sind, wenn sie sich anschaulich widersprechen! Genau das leistet schon der folgende Satz.

(11.3) Satz

Gegeben seien eine Ebene $e: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ und eine Gerade $g: \vec{X} = \vec{B} + \rho \vec{w}$.

Ist der Richtungsvektor der Geraden \vec{w} keine Linearkombination der Richtungsvektoren der Ebene \vec{u} und \vec{v} , so haben g und e genau einen gemeinsamen Punkt S .

Beweis:

Es ist nur zu beweisen, dass g und e überhaupt einen gemeinsamen Punkt haben. Es können nicht mehrere sein, weil nach dem Linearitätssatz andernfalls g bereits in e liegen müßte. Das wiederum würde zur Folge haben, dass gemäß Satz (11.1) der Richtungsvektor von g eine Linearkombination der Richtungsvektoren von e ist, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist.

Um nun zu beweisen, dass es überhaupt einen gemeinsamen Punkt von g und e gibt, ist zu zeigen, dass es Skalare λ , μ und ρ gibt mit: $\vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{B} + \rho \vec{w}$

Das ist gleichbedeutend damit, dass es Skalare λ , μ und ρ gibt mit:

$$\vec{AB} = +\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} - \rho \vec{w}$$

Da der Vektor \vec{w} keine Linearkombination von \vec{u} und \vec{v} ist, diese beiden Vektoren aber als Richtungsvektoren in einer Ebenengleichung linear unabhängig sein müssen, bilden die drei Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} eine Basis des Vektorraum \mathbb{R}^3 . Damit ist die Lösbarkeit der vorangehenden Vektorgleichung gesichert!

Anders als im Fall zweier Geraden wird in diesem Satz nicht vorausgesetzt, dass $g \cap e \neq \emptyset$ gilt. Vielmehr wird hier ausgesagt, dass die Schnittmenge gar nicht mehr leer sein kann, wenn nur vorausgesetzt wird, dass der Richtungsvektor der Geraden keine Linearkombination der Richtungsvektoren der Ebene ist. Als direkte Folgerung ergibt sich daraus :

(11.4) Korollar

Im Modellraum \mathbb{R}^3 kann eine Gerade nicht windschief zu einer Ebene sein.

Der Ausschluss des windschiefen Falles ist offenkundig ein dreidimensionales Phänomen, wie der Beweis des Satzes (11.3) zeigt. In der Geometrie des Hyperraumes \mathbb{R}^4 kann das Korollar (11.4) nicht gezogen werden.

Wir fassen die gewonnenen Erkenntnisse in einem Analyseraster für die Lagebeziehungen zusammen:

(11.5) Analyseraster

		Der Richtungsvektoren von g ist von den Richtungsvektoren von e linear abhängig	
		wahr	falsch
Der Stützpunkt von g gehört zu e	wahr	g schneidet e in genau einem Punkt	
	falsch		
g liegt in e		g e	



Im folgenden Beispiel wird gezeigt, wie die Berechnung eines Schnittpunktes von Gerade und Ebene erfolgt. In lautmalerischer Weise wird auch von einem „Durchstoßpunkt“ gesprochen.

(11.6) Beispiel („Berechnung des Durchstoßpunktes einer Geraden in einer Ebene“)

Gegeben sind die Ebene $e : \vec{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ und die Gerade $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zeige, dass die Gerade g die Ebene schneidet und berechne den zugehörigen Durchstoßpunkt!

Lösung:

Zunächst ist zu prüfen, ob der Richtungsvektor von g linear unabhängig von den Richtungsvektoren von e ist.

Das ist der Fall, wenn es kein Lösungspaar (λ, μ) für die Gleichung $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ gibt.

$$(1) \quad 2\lambda - 5\mu = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4\lambda - 10\mu = 4$$

$$(2) \quad -4\lambda + 6\mu = -5$$

$$[(3) \quad 9\lambda + 8\mu = 1]$$

$$(1) + (2) \quad -4\mu = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(4) \rightarrow (1) \quad 2\lambda - \frac{5}{4} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\lambda = \frac{13}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{13}{8} \quad (5)$$

$$(4),(5) \rightarrow (3) \quad 9 \cdot \frac{13}{8} + 8 \cdot \frac{1}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{117}{8} + \frac{16}{8} = 1 \quad [\text{falsch}]$$

Die drei Richtungsvektoren sind linear unabhängig. Die Gerade g muss daher die Ebene E in genau einem Punkt S durchstoßen. Es gibt also genau ein Parametertripl $(\lambda ; \mu ; \rho)$, das die „Schnittpunktgleichung“ löst:

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung der Schnittpunktparameterwerte ist ein lineares Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit drei Variablen zu lösen.

Dazu werden in gewohnter Weise multiplikativ angepasste Gleichungen addiert, um schrittweise zwei Variablen zu eliminieren, sodass die verbleibende dritte Variable aus einer linearen Gleichung errechnet werden kann.

Offensichtlich ist es klug, zunächst die Parameter λ und μ zu eliminieren, weil mit dem Parameter ρ über die Punktrichtungsgleichung von g der Schnittpunkt einfacher ermittelt werden kann als mit den Parametern λ und μ über die Punktrichtungsgleichung der Ebene e . Ist ρ berechnet, sind die Werte für λ und μ in der Regel uninteressant. An diese Vorüberlegung ist die Notation des Gleichungssystems angepasst:

$$(1) \quad 2\lambda - 5\mu - 13 = 2\rho \quad \Leftrightarrow \quad 4\lambda - 10\mu - 26 = 4\rho \quad \Leftrightarrow \quad 18\lambda - 45\mu - 117 = 18\rho$$

$$(2) \quad -4\lambda + 6\mu + 8 = -5\rho$$

$$(3) \quad 9\lambda + 8\mu - 15 = \rho \quad \Leftrightarrow \quad -18\lambda - 16\mu + 30 = -2\rho$$

$$(1) + (2) \quad -4\mu - 18 = -\rho \quad \Leftrightarrow \quad 244\lambda + 1098 = 61\rho \quad (4)$$

$$(1) + (3) \quad -61\mu - 87 = 16\rho \quad \Leftrightarrow \quad -244\lambda - 348 = 64\rho \quad (5)$$

$$(4) + (5) \quad 750 = 125\rho \quad \Leftrightarrow \quad 6 = \rho \quad (6)$$

Die folgenden Resubstitutionsschritte sind für die Schnittpunktbestimmung unerheblich:

$$(6) \rightarrow (4) \quad -4\mu - 18 = -6 \quad \Leftrightarrow \quad -4\mu = 12 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -3 \quad (7)$$

$$(6),(7) \rightarrow (1) \quad 2\lambda - 5 \cdot (-3) - 13 = 2 \cdot 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2\lambda = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 5$$

Der Durchstoßpunkt S ist gegeben durch $\vec{S} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -30 \\ 10 \end{pmatrix}$.