Übungen zu §11

Übung 11.1

Gegeben ist die Ebene $e: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Zeige, dass der Punkt Q = (–13; 5; 9) kein Punkt der Ebene e ist.

(b) Gib die Gleichungen von drei verschiedenen Geraden an, die durch den Punkt Q parallel zur Ebene e verlaufen.

Übung 11.2

Gegeben ist die Ebene $e: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Untersuche welche Lage die Gerade g bezüglich der Ebene e einnimmt und berechne die Koordinaten des Schnittpunkts, falls die Gerade g die Ebene e in genau einem Punkt schneidet.

(a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -12 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

(b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -15 \\ 17 \\ -4 \end{pmatrix}$

(d) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

Übung 11.3

Gegeben ist die Ebene $e: \vec{X} = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und die Gerade AB mit A = (3; –7; 4) und B = (13; –2; –11).

Zeige, dass die Ebene e die Gerade AB in einem Punkt S schneidet, gib dessen Koordinaten und das Verhältnis an, in dem S die Strecke $\overline{AB}$ teilt.

Übung 11.4

Gegeben sind die drei Punkte A = (8; –7; 5), B = (2; –1; 2), C = (4; 1; 1).

(a) Zeige, dass die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ die Dreiecksebene ABC in einem Punkt Q durchstößt.

(b) In §13 wird erläutert werden, dass der Punkt Q im Innern der Fläche des Dreiecks $\langle ABC \rangle$ liegt, falls Q die Gleichung $\vec{Q} = \vec{A} + \lambda\, \overrightarrow{AB} + \mu\, \overrightarrow{AC}$ mit Skalaren $\lambda, \mu \in [0; 1]$ erfüllt, für die $\lambda + \mu \le 1$ gilt. Untersuche, ob Q in diesem Sinne ein innerer Punkt des Dreiecks $\langle ABC \rangle$ ist!

Übung 11.5

Gegeben ist die Ebene $e: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und die Geradenschar $g_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ t-1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ -16 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Untersuche, für welche Parameterwerte t die Gerade g_t welche Lage bezüglich der Ebene e einnimmt.

Bestimme in Abhängigkeit vom Parameterwert $t \in \mathbb{R}$ den Schnittpunkt von g_t und e, falls ein solcher existiert.

Übung 11.6

Gegeben Ebenenschar $e_t : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und die Gerade $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Untersuche, für welche Parameterwerte t die Gerade g welche Lage bezüglich der Ebene e_t einnimmt.

Bestimme in Abhängigkeit vom Parameterwert $t \in \mathbb{R}$ den Schnittpunkt von g und e_t, falls ein solcher existiert.

Übung 11.7

Gegeben ist die Ebene $e : \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und die Geradenschar $g_t : \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -16+4t \\ 6+2t \\ -10-8t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass die Gerade g_t für jeden Parameterwert $t \in \mathbb{R}$ die Ebene e jeweils in genau einem Punkt S_t schneidet.

(b) Zeige weiterhin, dass diese Schnittpunkte eine Gerade bilden, und gib eine Punktrichtungsgleichung dieser Geraden an.