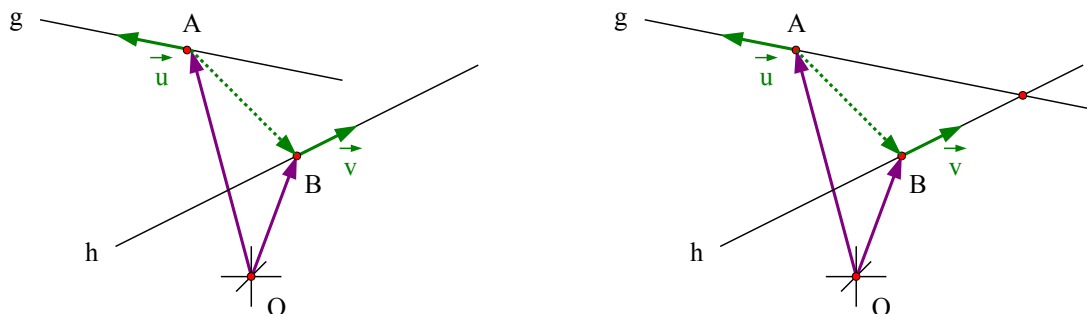




§10 Lineare Unabhängigkeit in Vektorräumen

Betrachten wir die Stützpunkte und Richtungsvektoren zweier windschiefer Geraden, die durch ihre Punktgleichungen $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \vec{v}$ gegeben sind, so ist uns anschaulich sofort klar, dass sich keiner der drei Vektoren \vec{AB} , \vec{u} , \vec{v} durch die anderen beiden linear kombinieren lässt.



Das ist auch theoretisch richtig. Falls sich beispielsweise der Vektor \vec{AB} durch die Vektoren \vec{u} und \vec{v} linear kombinieren ließe, gäbe es Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\vec{AB} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$. Dann folgte aber der Reihe nach:

$$\vec{AB} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \Rightarrow -\vec{A} + \vec{B} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \Rightarrow \vec{B} - \beta \vec{v} = \vec{A} + \alpha \vec{u}$$

Das bedeutete aber, dass die Geraden g und h im Widerspruch dazu, dass sie windschief sind, einen gemeinsamen Punkt besäßen. Also ist die Annahme, der Vektor \vec{AB} ließe sich durch die Vektoren \vec{u} und \vec{v} linear kombinieren, falsch.

Die anderen beiden Kombinationsfälle können wir auf den soeben behandelten zurückspielen. Würde sich nämlich der Vektor \vec{u} durch die Vektoren \vec{AB} und \vec{v} linear kombinieren lassen, gäbe es Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\vec{u} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{v}$. Dabei kann nicht $\alpha = 0$ gelten, weil sonst die beiden Vektoren \vec{u} und \vec{v} linear abhängig wären. Also ließe sich die Gleichung wie folgt passend zum ersten Fall umstellen:

$$\vec{u} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{v} \Rightarrow \vec{AB} = \frac{1}{\alpha} \vec{u} - \frac{\beta}{\alpha} \vec{v}$$

Jetzt ist noch einmal klar geworden, warum eine Ebene nicht zwei windschiefe Geraden inkludieren kann, denn andernfalls würde eine Ebene drei Richtungsvektoren besitzen können, von denen sich keiner durch die anderen beiden linear kombinieren lässt. Das widerspräche dem folgenden Satz:

(10.1) Satz

Sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ drei Richtungsvektoren einer Ebene e , so ist wenigstens einer der drei Vektoren eine Linearkombination der anderen beiden.

Beweis:

Ist einer der drei Vektoren, beispielsweise \vec{a} , von einem der anderen, beispielsweise \vec{b} , linear abhängig, so gibt es ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\vec{a} = \beta \vec{b}$. Daraus ergibt sich trivialerweise mit $\vec{a} = \beta \vec{b} + 0 \vec{c}$ sofort die Behauptung. Wir müssen daher den Satz nur noch für den Fall verifizieren, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ paarweise linear unabhängig sind.

Sei nun A irgendein Punkt der Ebene e . Wenn wir die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} als linear unabhängig voraussetzen dürfen, dann ist gemäß Korollar (9.11)

$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

eine Gleichung der Ebene e .

Nach Bemerkung (9.6) ist der Vektor \vec{c} eine Linearkombination der Richtungsvektoren \vec{a} und \vec{b} .

Anschaulich ausgedrückt, bedeutet der in Satz (10.1) formulierte Sachverhalt, dass es in einer Ebene keine drei voneinander unabhängige Richtungen geben kann. In diesem Sinne ist eine Ebene ein „zweidimensionales Gebilde“.



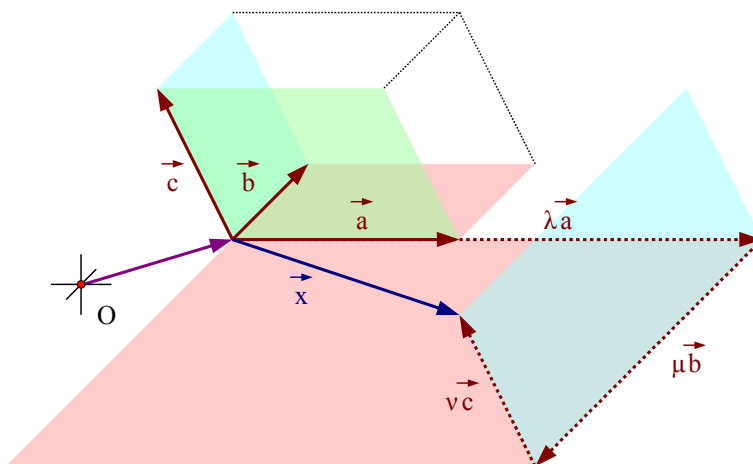
Um diesen Sachverhalte fachlich einwandfrei zu erfassen und naheliegende Verallgemeinerungen (für den Raum) vornehmen zu können, ist es notwendig, den Begriffsapparat geeignet zu erweitern. Das geschieht im Folgenden.

Zuerst erweitern wir den Begriff „Linearkombination“, der in Definition (6.3) nur für zwei Vektoren eingeführt wurde.

(10.2) Definition

Gegeben seien n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, wobei n eine natürliche Zahl sei.

Ein Vektor \vec{x} heiße *Linearkombination* der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, falls es Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i$ gilt.



Im zweiten Schritt werden die Begriffe „linear unabhängig“ und „linear abhängig“ erweitert, die in der Definition (6.1) ebenfalls nur für zwei Vektoren erklärt wurden.

(10.3) Definition

n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, wobei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, heißen *linear unabhängig*, wenn keiner dieser Vektoren als Linearkombination der übrigen $n - 1$ Vektoren dargestellt werden kann; andernfalls heißen die Vektoren *linear abhängig*.

Repräsentanten mit gemeinsamem Anfangspunkt zweier (dreier) linear unabhängiger Vektoren spannen im Anschauungsraum ein Parallelogramm (einen Spat¹) auf. So sind in der Zeichnung oben die Vektoren

$$\vec{a} \text{ und } \vec{b} \quad \vec{b} \text{ und } \vec{c} \quad \vec{a} \text{ und } \vec{c} \quad \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c}$$

als linear unabhängig anzusehen.

Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und \vec{x} sind jedoch linear abhängig, weil \vec{x} als Linearkombination von \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} dargestellt werden kann. Offenbar kann jeder der vier Vektoren, durch die übrigen drei linear kombiniert werden.

Diese wechselseitige Kombinierbarkeit wird aber für das Zustandekommen von linearer Abhängigkeit nicht verlangt; die Definition fordert nur, dass sich wenigstens einer der Vektoren durch die übrigen linear kombinieren lässt.

(10.4) Bemerkung

Ist einer von n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ der Nullvektor, so sind die Vektoren linear abhängig.

Beweis:

Sei o.B.d.A. der Vektor \vec{a}_1 der Nullvektor. Dann gilt:

$$\vec{a}_1 = 0 \vec{a}_2 + \dots + 0 \vec{a}_n = \sum_{i=2}^n 0 \vec{a}_i$$

¹ Ein Spat ist eine räumliche Figur, die aus sechs Parallelogrammen gebildet wird.



Der Beweis der Bemerkung deutet an, dass sich Linearkombinationen immer „auf triviale Weise“ ausbauen lassen.

(10.5) Bemerkung

Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear abhängig, so sind auch die Vektoren eines jeden Satzes, der als Obermenge die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ umfasst, linear abhängig.

Beweis:

Sei $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine Obermenge von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

Da die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear abhängig sein sollen, gilt o.B.d.A. $\vec{a}_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i \vec{a}_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Es folgt $\vec{a}_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i \vec{a}_i + \sum_{j=1}^k 0 \vec{b}_j$. Also sind die Vektoren $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ auch linear abhängig.

Aus der Bemerkung (10.6) folgt, dass sich lineare Unabhängigkeit auf Teilmengen von Vektoren „vererbt“:

(10.6) Bemerkung

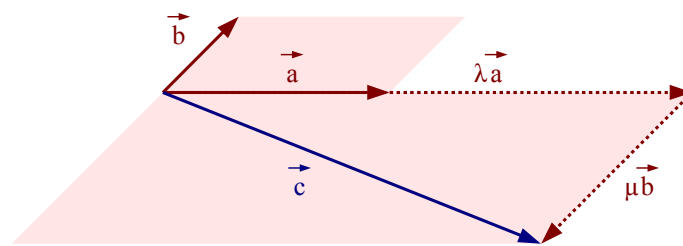
Sind die n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear unabhängig, so sind auch je k dieser Vektoren, $k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq n$, linear unabhängig.

Beweis:

Wäre eine Teilmenge der n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear abhängig, so wären gemäß Bemerkung (10.5) die n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ im Widerspruch zur Voraussetzung linear unabhängig.

Das Lösungskonzept für Teilverhältnis-Aufgaben hat gezeigt, dass lineare Unabhängigkeit benutzt werden kann, um Rückschlüsse auf die Koeffizienten einer Linearkombination zu ziehen. Das zeigt auch auf anschauliche Weise die nachfolgende Grafik:

- Sind drei Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} linear unabhängig, so kann aus ihnen der Nullvektor nur kombiniert werden, wenn alle Koeffizienten gleich 0 sind.
- Sind drei Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} jedoch linear abhängig, weil sich beispielsweise der Vektor \vec{a} durch die beiden anderen Vektoren \vec{b} und \vec{c} mit Hilfe von Skalaren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ linear kombinieren lässt, so kann sofort eine weitere, nichttriviale Kombination des Nullvektors angegeben werden.



$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \Leftrightarrow \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$$

(10.7) Satz („Nullvektorkriterium für lineare Unabhängigkeit“)

Endlich viele Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, n \in \mathbb{N}$, sind genau dann linear unabhängig, wenn sich der Nullvektor nur auf die triviale Weise $[\vec{0} = 0 \vec{a}_1 + \dots + 0 \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n 0 \vec{a}_i]$ durch diese Vektoren linear kombinieren lässt.

Beweis:

„ \Rightarrow “:

Seien die n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear unabhängig.

Angenommen, es gäbe eine zweite nicht triviale Linearkombination des Nullvektors:



$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i$$

Diese Kombination unterscheidet sich von der trivialen nur dann, wenn wenigstens ein Koeffizient, o.B.d.A. λ_1 , von 0 verschieden ist. Dann folgt aber über $\lambda_1 \vec{a}_1 = -\lambda_2 \vec{a}_2 - \dots - \lambda_n \vec{a}_n = -\sum_{i=2}^n \lambda_i \vec{a}_i$

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{a}_n = -\sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \vec{a}_i$$

Die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ wären linear abhängig, was der Voraussetzung widerspricht. Es kann also keine zweite, nicht triviale Linearkombination des Nullvektors geben.

„ \Leftarrow “:

Wir gehen nun davon aus, dass der Nullvektor aus den Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ nur auf die triviale Weise kombiniert werden kann.

Angenommen, die Vektoren wären dennoch linear abhängig. Dann kann o.B.d.A. der Vektor \vec{a}_1 durch die übrigen linear kombiniert werden:

$$\vec{a}_1 = \lambda_1 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \sum_{i=2}^n \lambda_i \vec{a}_i$$

Wie wir sehen, kann durch Umstellen der Gleichung sofort eine Linearkombination des Nullvektors hergestellt werden, die sich wenigstens im ersten Koeffizienten von der trivialen unterscheidet. Das widerspricht der Voraussetzung. Die Vektoren müssen linear unabhängig sein.

Dass sich der Nullvektor durch linear unabhängige Vektoren nur auf die triviale Weise linear kombinieren lässt, hat weitreichende Konsequenzen:

(10.8) Korollar

Gegeben seien n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

Sind diese Vektoren linear unabhängig, so kann jeder Vektor, der eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ist, nur auf eine einzige Weise durch die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear kombiniert werden.

Beweis:

Angenommen es gäbe einen Vektor \vec{x} , der auf zwei Weisen durch die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear kombiniert werden kann:

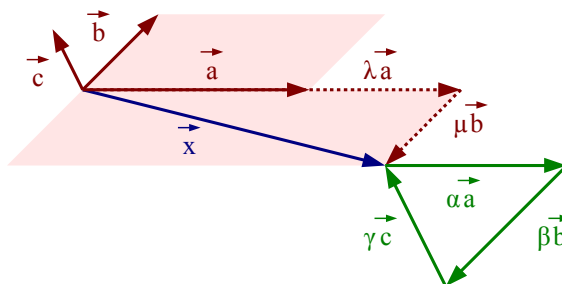
$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \vec{a}_i \text{ mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}, \lambda_i \neq \mu_i \text{ für mindestens für einen Index } i$$

Durch Subtrahieren folgt daraus:

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) \vec{a}_i \text{ mit } \lambda_i - \mu_i \neq 0 \text{ für mindestens für einen Index } i$$

Im Widerspruch zur Voraussetzung wären die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear abhängig! Die Annahme ist falsch.

Wird ein Vektor durch linear abhängige Vektoren kombiniert, kann dagegen nicht auf die Eindeutigkeit der Darstellung geschlossen werden, da diese sich durch Hinzuaddieren von nicht trivialen Linearkombinationen des Nullvektors abändern lässt.

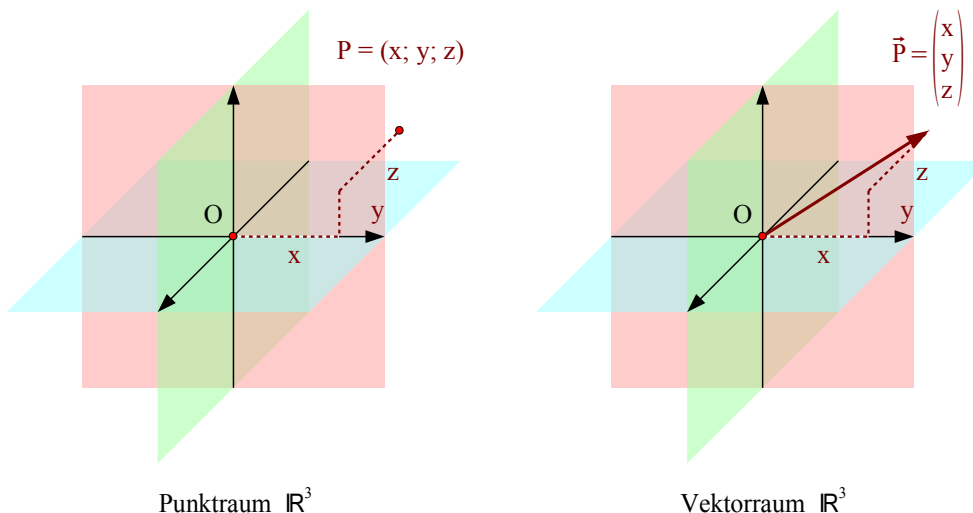


In der vorangehenden Grafik sind die Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} linear abhängig. Es gilt: $\vec{x} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \underbrace{\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}}_{=\vec{0}}$



Linear unabhängige Vektoren haben also die besondere Eigenschaft, dass ihre Linearkombinationen eindeutig sind. In Anwendungsaufgaben wird deswegen oft (so wie in Beispiel (8.3) geschehen) dazu übergegangen, alle Vektoren, die betrachtet werden, durch einen Satz linear unabhängiger Vektoren darzustellen.

Können alle Vektoren einer Vektormenge durch einen Satz linear unabhängiger Vektoren dargestellt werden, wird dieser Satz von linear unabhängigen Vektoren (unter gewissen weiteren Voraussetzungen, die an die Vektormenge gestellt werden) „Basis“ der Vektormenge genannt. Bevor eine offizielle Definition des Begriffs „Basis“ verfasst werden kann, sind noch ein paar Abklärungen vorzunehmen. Die erste Abklärung betrifft unseren Modellraum \mathbb{R}^3 .



Als Menge aller Tripel reeller Zahlen kann der \mathbb{R}^3 einerseits als algebraisches Modell der Gesamtheit aller Raumpunkte aufgefasst werden, wobei in unserer Anschauung jedes Zahlentripel über ein kartesisches Koordinatensystem mit einem Raumpunkt P identifiziert wird: $P = (x; y; z)$

Als Menge aller Tripel reeller Zahlen kann der \mathbb{R}^3 andererseits auch als algebraisches Modell der Gesamtheit aller Vektoren aufgefasst werden, wobei in unserer Anschauung jedes Zahlentripel mit einer (den gesamten Punktraum erfassenden) Verschiebung identifiziert wird: $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Die Verbindung zwischen diesen beiden Interpretationen des \mathbb{R}^3 liefert der Begriff „Ortsvektor“:

- Zu jedem Punkt $(x; y; z)$ ist $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der einzige Vektor, der den Ursprung auf den Punkt $(x; y; z)$ abbildet.
- Zu jedem Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist der Punkt $(x; y; z)$ der einzige, auf den der Vektor den Ursprung abbildet.

In der Auffassung als Punktraum hat der \mathbb{R}^3 eine geometrische und topologische Struktur, in der Auffassung als Vektormenge hat er eine algebraische Struktur, die durch das Vorhandensein der Vektoraddition und der Skalarmultiplikation sowie der Gesetzmäßigkeiten erzeugt wird, die diesen Verknüpfungen zu eigen sind.

Diese algebraische Struktur ist so charakteristisch, so prägend, dass in der Mathematik jede Menge, die diese algebraische Struktur aufweist, „Vektorraum“ genannt wird, auch wenn ihre Objekte keine Translationen des Modellraums sind.

Nur um ein „Blitzlicht“ in die Welt der Vektorräume zu werfen, sei erwähnt, dass die Menge aller in Gramm notierten Gewichtsangaben $\{x \text{ [g]} \mid x \in \mathbb{R}\}$, versehen mit der Addition von Gewichtsangaben und der Multiplikation von Gewichtsangaben mit reellen Zahlen, einen Vektorraum im Sinne der unten folgenden Definition (10.9) bilden:

Vektoraddition: $36 \text{ g} + 87 \text{ g} = 123 \text{ g}$
 Skalarmultiplikation: $7 \cdot 25 \text{ g} = 175 \text{ g}$



(10.9) Definition

Gegeben sei eine nichtleere Menge von Objekten V .

In der Menge V sei eine „Addition“ erklärt, das heißt, es gebe eine Zuordnung „+“, die je zwei Elementen $u, v \in V$ genau ein Element $w \in V$ zuordnet, das dann mit „ $u + v$ “ bezeichnet wird.

Diese Addition erfülle folgende Gesetze:

- (1) Kommutativgesetz: $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$
- (2) Assoziativgesetz: $(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V$
- (3) Existenz eines neutralen Elements: $\exists n \in V$ mit der Eigenschaft $u + n = u \quad \forall u \in V$
- (4) Existenz der inversen Elemente: $\forall u \in V \quad \exists v \in V$ mit der Eigenschaft $u + v = n$

Außerdem sei für die Elemente der Menge V eine Multiplikation mit reellen Zahlen erklärt, das heißt, es gebe eine Zuordnung „ \cdot “, die jedem Element $u \in V$ und jeder reellen Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ genau ein Element $w \in V$ zuordnet, das dann mit $\lambda \cdot u$ bezeichnet wird. Die reellen Faktoren werden „Skalare“ genannt.

Diese „Skalarmultiplikation“ erfülle folgende Gesetze:

- (5) Gesetz der Einheit: $1 \cdot u = u \quad \forall u \in V$
- (6) Gemischt-assoziatives Gesetz: $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in V$
- (7) Distributivgesetz für Skalare: $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$
- (8) Distributivgesetz für Elemente: $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in V$

Sind vorgenannten Bedingungen ausnahmslos erfüllt, so wird die mit der Addition „+“ und der Skalarmultiplikation „ \cdot “ ausgestattete Menge V *reeller Vektorraum* genannt. Ihre Elemente heißen *Vektoren*.

Es ist offenkundig, dass der \mathbb{R}^3 in seiner Interpretation als Vektormenge das Vorbild für diese allgemeine Definition des Vektorraumbegriffs abgegeben hat. Die im \mathbb{R}^3 definierte Vektoraddition und die im \mathbb{R}^3 definierte Skalarmultiplikation erfüllen genau die Gesetze, die für einen Vektorraum im allgemeinen Sinne konstituierend sind. Wir sprechen daher zukünftig vom „Vektorraum \mathbb{R}^3 “, wenn wir den \mathbb{R}^3 nicht als Punkt-, sondern als Vektormenge interpretieren.

Die Überlegungen, die wir für den \mathbb{R}^3 angestellt haben, können uneingeschränkt auf den \mathbb{R}^2 , die Menge aller reellen Zahlenpaare, übertragen werden. Der \mathbb{R}^2 ist einerseits eine Punktmenge, die mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems geometrisiert werden kann; andererseits ist er ein „reeller Vektorraum“ im Sinne der Definition (10.9). Im Unterschied zum \mathbb{R}^3 finden die Veranschaulichungen seiner Objekte nicht im Euklidischen Anschauungsraum, sondern in der Euklidischen Anschauungsebene statt.

Wir können sogar noch einen Schritt weitergehen und die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} selbst als „reellen Vektorraum“ begreifen. Jede reelle Zahl kann einerseits als Punkt auf einer gedachten Zahlengeraden oder andererseits als Vektor, der alle Zahlen auf der Zahlengeraden verschiebt, interpretiert werden. Neben der gewöhnlichen Addition reeller Zahlen gibt es im „Vektorraum“ \mathbb{R} die gewöhnliche Multiplikation reeller Zahlen, die, als Skalarmultiplikation interpretiert, alle geforderten Gesetze einhält.

Tatsächlich kennt die Mathematik noch unzählige weitere wichtige Beispiele für reelle Vektorräume, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen. Stattdessen kümmern wir uns nun, wie oben angekündigt, um den Begriff „Basis“.

10.10 Definition

Gegeben sei ein Vektorraum V mit seiner Addition „+“ und seiner Skalarmultiplikation „ \cdot “.

Ein Satz von Vektoren $B \subset V$ heißt *Basis* des Vektorraums, wenn jeder Vektor $v \in V$ auf genau eine Weise durch Vektoren aus B linear kombiniert werden kann. Die Vektoren aus B heißen *Basisvektoren*.

Wir können sofort anmerken, dass Vektoren linear unabhängig sein müssen, um eine Basis zu bilden, weil andernfalls die mit ihnen gebildeten Linearkombinationen nicht eindeutig sind.

10.11 Bemerkung

Bildet ein Satz B von Vektoren eine Basis eines Vektorraums V , dann sind die Basisvektoren linear unabhängig.

Mit der Bildung der Begriffe „Basis“ und „Basisvektoren“ kehren wir aus der allgemeinen Vektorraumtheorie zurück in unseren Modellraum \mathbb{R}^3 .



Es stellt sich die Frage, welche weiteren Bedingungen zu erfüllen sind, damit ein Satz von Vektoren des \mathbb{R}^3 eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden. Um einen Ansatzpunkt für diese Untersuchung zu finden, beginnen wir mit einem

(10.12) Beispiel

Die drei „kanonischen Einheitsvektoren“ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des \mathbb{R}^3 .

Beweis:

Offenbar sind die Vektoren linear unabhängig.

Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ irgendein Vektor des \mathbb{R}^3 . Dann gilt $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also kann jeder Vektor durch die drei gegebenen linear kombiniert werden.

Wir werden nun zeigen, dass drei linear unabhängigen Vektoren immer eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden. Dreh- und Angelpunkt in dieser Überlegung ist der in jedem Vektorraum V gültige Austausch-Satz von Steinitz.

(10.13) Austausch-Satz von Steinitz

Gegeben seien in einem Vektorraum V die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

Außerdem seien gleich viele (!) Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ gegeben, die allesamt Linearkombinationen der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sind. Unter diesen Voraussetzungen gilt:

Sind die Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ linear unabhängig, so kann jeder Vektor, der eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ist, auch durch die Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ linear kombiniert werden.

Offenbar ist unter den Voraussetzungen des Austauschsatzes jede Linearkombination der Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ automatisch auch eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, weil ja jeder Vektor \vec{b}_i durch die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ kombiniert werden kann. In dieser Richtung ist die Übertragung der Fähigkeit, Vektoren zu „erzeugen“, nicht sonderlich bemerkenswert. Die Bedeutung des Satzes liegt vielmehr in der Angabe von Bedingungen, unter denen „erzeugte“ Vektoren zu „erzeugenden“ werden!

Beweisskizze zum Austausch-Satz:

Gelte $\vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$.

Da \vec{b}_1 nach Bemerkung (10.4) nicht der Nullvektor sein kann, muss mindestens einer der Skalare λ_i von 0 verschieden sein. O.B.d.A. nehmen wir an, es ist λ_1 . Dann kann die Gleichung durch λ_1 dividiert und nach \vec{a}_1 aufgelöst werden:

\vec{a}_1 ist also eine Linearkombination der Vektoren $\vec{b}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Also können alle Vektoren, die Linearkombinationen der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sind, auch durch die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ausgedrückt werden. Das gilt insbesondere für den Vektor \vec{b}_2 :

$$\vec{b}_2 = \mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{a}_2 + \dots + \mu_n \vec{a}_n$$

Jetzt muß mindestens einer der Vorfaktoren μ_2, \dots, μ_n von 0 verschieden sein, sonst würde $\vec{b}_2 = \mu_1 \vec{b}_1$ gelten, was der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ widerspräche. O.B.d.A. nehmen wir an, es sei μ_2 . Dann kann die Gleichung durch μ_2 dividiert und nach \vec{a}_2 aufgelöst werden:

\vec{a}_2 ist also eine Linearkombination der Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$.

Also können alle Vektoren, die Linearkombinationen der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sind, auch durch die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ kombiniert werden.

Offenbar kann der Austausch-Prozess fortgesetzt werden, bis alle Vektoren \vec{a}_i durch die Vektoren \vec{b}_i ersetzt worden sind, ohne dass die Fähigkeit, bestimmte Vektoren erzeugen zu können, verloren geht.

(10.14) Korollar

Je drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ des \mathbb{R}^3 bilden eine Basis des \mathbb{R}^3 .

Beweis:

Da die drei Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden, können mit ihrer Hilfe alle Vektoren des \mathbb{R}^3 , insbesondere die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear kombiniert werden. Auf Grund des Austausch-Satzes ist dann aber auch jeder Vektor des \mathbb{R}^3 eine Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Da die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig sind, sind ihre Linearkombinationen eindeutig.

Mehr als drei Vektoren sind für eine Basis des \mathbb{R}^3 zu viel. Wegen Bemerkung (10.5) genügt folgende Begründung:

(10.15) Korollar

Vier Vektoren des \mathbb{R}^3 sind immer linear abhängig.

Beweis:

Angenommen es gäbe vier linear unabhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ im \mathbb{R}^3 ; dann müssen nach Bemerkung (10.6) auch die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig sein.

Nach Korollar (10.14) kann dann aber schon jeder Vektor des \mathbb{R}^3 durch die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ kombiniert werden, insbesondere also auch Vektor \vec{d} . Widerspruch!

Weniger als drei Vektoren reichen nicht aus, um eine Basis des \mathbb{R}^3 zu bilden:

(10.16) Korollar

Mit weniger als drei Vektoren können nicht alle Vektoren des \mathbb{R}^3 linear kombiniert werden.

Beweis:

Angenommen, es gäbe zwei Vektoren \vec{u}, \vec{v} , mit denen alle Vektoren des \mathbb{R}^3 linear kombiniert werden können.

Seien weiterhin $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ drei linear unabhängige Vektoren. Die Existenz ist gemäß Beispiel (10.12) gesichert. Dann sind nach (10.6) auch die beiden Vektoren \vec{a}, \vec{b} linear unabhängig.

Laut Annahme sind die Vektoren \vec{a}, \vec{b} Linearkombinationen der Vektoren \vec{u}, \vec{v} . Aus dem Austausch-Satz (10.13) folgt, dass jeder Vektor (wie durch die Vektoren \vec{u}, \vec{v}) auch durch und die Vektoren \vec{a}, \vec{b} kombiniert werden kann. Das muss dann aber auch für den Vektor \vec{c} gelten, was im Widerspruch zur vorausgesetzten der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ steht. Die Annahme ist falsch!

Die drei Korollare lassen sich wie angekündigt zusammenfassen :

(10.17) Theorem

Ein Satz von Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ist genau dann eine Basis des \mathbb{R}^3 , wenn die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear unabhängig sind und $n = 3$ ist.

Es kann übrigens allgemein gezeigt werden, dass die Anzahl von Basisvektoren in jedem Vektorraum, der eine endliche Anzahl von Basisvektoren besitzt, eine Invariante ist (Vorsicht: Es gibt auch Vektorräume mit unendlich vielen Basisvektoren!). Infolge dieser Überlegungen wird diese Anzahl gewöhnlich als „Dimension“ des Vektorraumes definiert. In diesem Sinne besitzt der Vektorraum \mathbb{R}^3 die Dimension 3.

Offenbar muss nicht näher erläutert werden, dass die Modellebene \mathbb{R}^2 die Dimension 2 und die Zahlengerade $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ die Dimension 1 besitzen.



In dem nächsten Satz wird geklärt, wie Mengen von linear unabhängigen Vektoren erweitert werden können, ohne dass die lineare Unabhängigkeit verloren geht. Damit ist auch ein Rezept gegeben, wie Basen von Vektorräumen konstruiert werden können.

(10.18) Theorem

Sind in einem Vektorraum V die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, linear unabhängig und ist \vec{b} ein Vektor, der sich nicht durch die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ kombinieren lässt, so sind die Vektoren $\vec{b}, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ebenfalls linear unabhängig.

Beweis:

Wir nehmen an, die Vektoren $\vec{b}, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ seien trotz der gegebenen Voraussetzungen linear abhängig. Dann ließe sich einer von ihnen durch die anderen linear kombinieren. Da das für den Vektor \vec{b} nach Voraussetzung nicht möglich ist, müsste sich dieser linear kombinierbare Vektor unter den Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ befinden.

O.B.d.A nehmen wir an, dass dieses der Vektor \vec{a}_1 sei. Dann gäbe es folglich Koeffizienten μ_1, \dots, μ_n mit der Eigenschaft

$$\vec{a}_1 = \mu_1 \vec{b} + \mu_2 \vec{a}_2 + \dots + \mu_n \vec{a}_n$$

In dieser Darstellung des Vektors \vec{a}_1 dürfte der Skalar μ_1 nicht gleich null sein, weil andernfalls die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ im Widerspruch zur Voraussetzung linear abhängig wären.

Das ermöglichte aber die Auflösung der Vektorgleichung nach Vektor \vec{b} und es ergäbe sich daraus ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass \vec{b} nicht kombiniert werden kann.

Die Behauptung des Satzes muss also richtig sein.

Wir demonstrieren die Konstruktion einer Basis des \mathbb{R}^3 an einem Beispiel.

10.19 Beispiel

Die drei Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des \mathbb{R}^3 .

Nachweis:

Offensichtlich sind die ersten beiden Vektoren linear unabhängig.

Gemäß Theorem (10.18) ist nur noch zu zeigen, dass sich der dritte Vektor nicht durch die ersten beiden kombinieren lässt. Wir betrachten daher den folgenden Ansatz:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Wir versuchen, das zugehörige lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$(1) \quad 2\lambda + 2\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\mu$$

$$(2) \quad \lambda - \mu = 3$$

$$[(3) \quad -3\lambda + 4\mu = 1]$$

$$(1) \rightarrow (2) \quad -\mu - \mu = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$(4) \rightarrow (1) \quad \lambda = \frac{3}{2} \quad (5)$$

$$(4),(5) \rightarrow (3) \quad -3 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{21}{2} = 1 \quad [\text{falsch!}]$$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar; der dritte Vektor ist keine Linearkombination der ersten beiden.

Um einem verbreiteten Missverständnis vorzubeugen, sei angemerkt, dass der Vektorraum \mathbb{R}^2 kein „Teil“ des Vektorraums \mathbb{R}^3 ist. Zahlenpaare sind nun einmal keine Zahlentripel!

Dennoch haben wir natürlich die Vorstellung, dass die Modellebene in irgendeiner vernünftigen Weise in den Modellraum eingebettet werden müsste.



Wenn wir den Modellraum mit einem kartesischen Koordinatensystem betrachten, wird uns schnell klar, dass die Modellebene genauso gut als 2-3-Ebene oder 1-3-Ebene vorstellbar wäre wie als 1-2-Ebene. das heißt aber, jede Ebene im Modellraum müsste eigentlich den \mathbb{R}^2 im \mathbb{R}^3 repräsentieren ...

Dass das so ist, sollen die folgenden Überlegungen zeigen. Zunächst definieren wir in größtmöglicher Allgemeinheit:

(10.19) Definition

Gegeben sei ein reeller Vektorraum V mit seiner Addition „+“ und seiner Skalarmultiplikation „·“.

Eine Teilmenge von Vektoren U heißt Untervektorraum von V , wenn U bezüglich der beiden Verknüpfungen abgeschlossen ist, das heißt, alle Linearkombinationen von Vektoren aus U wieder einen Vektor aus U liefern.

Natürlich sind alle Gesetze für die Addition und Skalarmultiplikation auch in einem Untervektorraum gültig, weil sie im umfassenden Vektorraum V gültig sind. Denken wir uns die Restmenge $V \setminus U$ weg, so ist U ein eigenständiger Vektorraum.

Nach dieser gedanklichen Vorbereitung gelangen wir zu überraschenden Ergebnissen (siehe auch Übung (10.3)).

10.20 Satz

Gegeben sei in unserem Modellraum \mathbb{R}^3 eine Gerade g durch eine Punktgleichung $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$.

Dann bildet die Menge der Richtungsvektoren von g einen Untervektorraum U des \mathbb{R}^3 .

Der Richtungsvektor \vec{u} der Geraden g bildet eine Basis des Untervektorraums U . Der Untervektorraum U hat daher die Dimension 1.

Beweis:

Als Richtungsvektor aus der Gleichung von g , darf der Vektor \vec{u} nicht der Nullvektor sein.

In der Bemerkung (5.6) haben wir festgestellt, dass ein Vektor \vec{v} genau dann ein Richtungsvektor der Geraden g ist, wenn er ein skalares Vielfaches des Vektors \vec{u} ist.

Die skalaren Vielfachen des Vektors \vec{u} sind aber alle Linearkombinationen, die mit dem einzigen Vektor \vec{u} gebildet werden können. Also erfüllt U die in Definition (10.19) formulierte Bedingung für einen Untervektorraum.

Eigentlich ist schon alles Erforderliche gesagt, aber zur Verdeutlichung der Erfüllung der Vektorraumaxiome merken machen wir folgende Ausführungen:

(1) Die Summe zweier Richtungsvektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 ist wieder ein Richtungsvektor von g :

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{u} = (\lambda_1 + \lambda_2) \vec{u}$$

(2) Ein reelles Vielfaches eines Richtungsvektors \vec{v} ist wieder ein Richtungsvektor von g :

$$\mu \vec{v} = \mu (\lambda \vec{u}) = (\mu \lambda) \vec{u}$$

Mit $\mu = -1$ ist insbesondere der Gegenvektor eines Richtungsvektors wieder ein Richtungsvektor von g .

Mit $\mu = 0$ ist auch der Nullvektor ein Richtungsvektor von g .

(3) Die Gültigkeit aller Strukturgesetze (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz etc.) ist gesichert, da ja alle Richtungsvektoren von g Vektoren des Vektorraums \mathbb{R}^3 sind, in dem die Strukturgesetze gelten.

Wenn wir die Richtungsvektoren einer Geraden g als Ortsvektoren interpretieren und die zu den Ortsvektoren gehörenden Punkte betrachten, erhalten wir eine Parallele, die durch den Ursprung verläuft.

Ist die Gerade g selbst schon eine Ursprungsgerade, dann ist sie mit dem Vektorraum der Richtungsvektoren identisch.

Offenbar stellen die Ursprungsgeraden die eindimensionalen Untervektorräume des \mathbb{R}^3 dar. Weil es davon unendlich viele gibt, existieren unendlich viele Einbettungen des Vektorraums $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ in den Vektorraum \mathbb{R}^3 .

