



Übungen zu §10

Übung 10.1

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$.

- Berechne die Linearkombination $\vec{x} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} + \delta \vec{d}$ mit $\alpha = -3$; $\beta = -2$; $\gamma = 1$; $\delta = 2$.
- Berechne die Linearkombination $\vec{y} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \rho \vec{c} + \sigma \vec{d}$ mit $\lambda = -1$; $\mu = -1$; $\rho = 2$; $\sigma = 1$.
- Drücke den Vektor $\vec{x} - \vec{y}$ als nicht triviale Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} aus.
- Untersuche die Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} auf lineare Unabhängigkeit.

Übung 10.2

Untersuche die Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} auf lineare Unabhängigkeit.

- $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$
- $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

Übung 10.3

- Beweise (in Anlehnung an Satz (10.20)) den folgenden Sachverhalt:

Satz (10.21)

Gegeben sei im Modellraum \mathbb{R}^3 eine Ebene e durch eine Punktrichtungsgleichung $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$.

Dann bildet die Menge der Richtungsvektoren von e einen Untervektorraum U des \mathbb{R}^3 .

Die in der Gleichung genannten Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} der Ebene e bilden eine Basis des Untervektorraums U . Dieser hat daher die Dimension 2.

- Erläutere, wie dieser Untervektorraum U des \mathbb{R}^3 veranschaulicht werden kann.

Übung 10.4

Der „Hyperraum“ \mathbb{R}^4 sei definiert als Menge Quadrupel reeller Zahlen $\mathbb{R}^4 := \{(w; x; y; z) \mid w, x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

- Definiere in natürlicher Weise eine Addition und eine Skalarmultiplikation im \mathbb{R}^4 .
- Begründe kurz, warum der \mathbb{R}^4 mit diesen beiden Verknüpfungen zu einem reellen Vektorraum wird.
- Gib eine Basis für den \mathbb{R}^4 an und notiere seine Dimension.

Übung 10.5

Eine quadratische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt einen Funktionsterm der Form $f(x) = a x^2 + b x + c$ mit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sei Q_F die Menge aller quadratischen Funktionen. Wir definieren zwei Verknüpfungen:

- Für je zwei quadratische Funktionen f, g sei die Summe $f + g$ erklärt durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- Für eine quadratische Funktionen f und einen reellen Skalar $c \in \mathbb{R}$ sei die Funktion cf erklärt durch $(cf)(x) := c \cdot f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- Weise nach, dass die Menge Q_F mit diesen Verknüpfungen zu einem reellen Vektorraum wird.
[Hinweis: Zeige zuerst, dass die Verknüpfungen nicht aus der Menge Q_F herausführen!]
- Weise nach, dass die drei Funktionen f_0, f_1, f_2 eine Basis des Vektorraums Q_F bilden, wenn diese wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ f_1(x) &= 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ f_2(x) &= 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Dabei darf folgender Sachverhalt unbewiesen benutzt werden:

„Ist in dem Funktionsterm $f(x) = ax^2 + bx + c$ der quadratischen Funktion f wenigstens einer der Koeffizienten a, b, c von 0 verschieden, so hat die Funktion f höchstens zwei Nullstellen.“

- (c) Eine lineare Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt einen Funktionsterm $f(x) = mx + n$ mit Koeffizienten $m, n \in \mathbb{R}$. Weise nach, dass die Menge $L_{\mathbb{F}}$ aller linearen Funktionen, versehen mit der oben erklärten Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen, in natürlicher Weise einen Untervektorraum der Dimension 2 des Vektorraums $Q_{\mathbb{F}}$ bildet.

Übung 10.6

Beweise den folgenden Satz:

Satz:

Zu jeder Ebene $e : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ im Modellraum gibt es (mindestens) einen Punkt Q , der nicht auf der Ebene e liegt.

Tipps:

- Führe den Beweis indirekt.
- Betrachte dazu zunächst die drei Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Verbindung mit dem Stützpunkt A der Ebene e .
- Beachte auch Satz (10.1).]

Übung 10.7 (Köhler/Höwermann Seite 31, Aufgabe 8)

Gegeben ist ein Spat $ABCDEFGH$ durch die drei linear unabhängigen Vektoren $\vec{a} = \vec{AB}, \vec{b} = \vec{AD}, \vec{c} = \vec{AE}$.

Die Gerade g verlaufe durch den Mittelpunkt M der Kante \overline{EH} und durch einen Punkt T auf der Raumdiagonalen \overline{AG} des Quaders. Die Gerade g schneide die Grundfläche $\langle ABCD \rangle$ in einem Punkt S .

Bestimme das Verhältnis, in dem T die Raumdiagonale \overline{AG} teilt, und den Parameter m , mit dem der Vektor \vec{AS} kombiniert wird.

- (a) $\vec{AS} = \frac{3}{4} \vec{a} + m \vec{b}$ (b) $\vec{AS} = m \vec{a} + \frac{1}{5} \vec{b}$ (c) $\vec{AS} = \frac{1}{5} \vec{a} + m \vec{b}$

