Übung 10.1

(a) $\vec{x} = -3\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-2\\0\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-6\\-12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\6\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\0\\24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-1\\13\end{pmatrix}$

(b) $\vec{y} = -\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\-2\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-1\\13\end{pmatrix}$

(c) $\vec{x} - \vec{y} = (-3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} + 2\vec{d}) - (-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} + \vec{d})$

$= -2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$

(d) Da $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$ gemäß Teilaufgaben (a) und (b) gilt, liegt in Teilaufgabe (c) eine nicht triviale Linearkombination des Nullvektors aus den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ vor. Aus diesem Grund sind die vier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ linear abhängig.

Übung 10.2

(a) Wir untersuchen die Vektorgleichung $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \lambda - 5\mu + 2\nu = 0 & \overset{}{\underset{\cdot 3}{\Longleftrightarrow}} & 3\lambda - 15\mu + 6\nu = 0 \\
(2) & -2\lambda \quad\quad - \nu = 0 & \underset{\cdot(-9)}{\Longleftrightarrow} & 18\lambda + 9\nu = 0 \\
(3) & 5\lambda + 3\mu - 3\nu = 0 & \underset{\cdot 5}{\Longleftrightarrow} & 25\lambda + 15\mu - 15\nu = 0
\end{array}
$$

$(1)+(3)$: $28\lambda - 9\nu = 0$ $\quad(4)$

$(4)+(2)$: $46\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ $\quad(5)$

$(5)\to(2)$: $-\nu = 0 \Leftrightarrow \nu = 0$ $\quad(6)$

$(5),(6)\to(1)$: $0 - 5\mu + 2\cdot 0 = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$

Die oben notierte Vektorgleichung hat nur die Lösung $(\lambda,\mu,\nu) = (0,0,0)$.

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig.

(b) (1) $4\lambda - 4\mu + 2\nu = 0 \overset{\cdot 5}{\Leftrightarrow} 20\lambda - 20\mu + 10\nu = 0$

(2) $-\lambda + 5\mu + 2\nu = 0 \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow} -4\lambda + 20\mu + 8\nu = 0$

(3) $-2\lambda + 4\mu - 7\nu = 0$

(1) + (3): $2\lambda - 5\nu = 0 \overset{\cdot(-8)}{\Leftrightarrow} -16\lambda + 40\nu = 0$ (4)

(1) + (2): $16\lambda + 18\nu = 0$ (5)

(4) + (5): $58\nu = 0 \Leftrightarrow \nu = 0$ (6)

(6) → (4): $2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ (7)

(6), (7) → (1): $4 \cdot 0 - 4\mu + 2 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$

Da die Vektorgleichung $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$ nur mit dem Koeffiziententripel $(\lambda; \mu; \nu) = (0; 0; 0)$ gelöst werden kann, sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig.

Übung 10.3

(a) Nach Bemerkung (9.6) ist ein Vektor $\vec{x}$ genau dann ein Richtungsvektor von e, wenn $\vec{x}$ eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist.

Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zwei Richtungsvektoren von e. Dann gibt es Skalare $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \gamma\vec{u} + \delta\vec{v}$$

Es folgt: $\vec{x} + \vec{y} = (\alpha + \gamma)\vec{u} + (\beta + \delta)\vec{v}$

Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ irgendein Skalar, dann gilt $\varphi\vec{x} = \varphi\alpha\vec{u} + \varphi\beta\vec{v}$

Die Summe zweier Richtungsvektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist ebenso wieder ein Richtungsvektor wie das skalare Vielfache $\varphi\vec{x}$ eines Richtungsvektors. Also bilden die Richtungsvektoren von e einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kann jeder weitere Richtungsvektor nur auf genau eine Weise durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kombiniert werden. $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bilden daher eine Basis.

(b) Die Menge der Richtungsvektoren von e

$U = \{ \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$ stimmt mit

der Menge der Ortsvektoren $\vec{x}$ überein, die die

Gleichung $\vec{x} = \vec{0} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Die zugehörige Punktmenge $\{ X \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \vec{0} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$

bildet eine Ebene die durch den Ursprung O verläuft.

Übung 10.4

(a) Wir definieren für $\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{pmatrix}$

und für $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda\vec{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \lambda x_4 \end{pmatrix}$.

(b) Offenbar erfüllen die in Teilaufgabe (a) definierten Verknüpfungen alle Anforderungen, die an eine Addition und eine Skalarmultiplikation eines Vektorraumes gestellt werden. Die Nachweise erfolgen analog zu denen der Paragraphen §3 und §4, jeweils erweitert um eine 4. Komponente.

Der Vektor $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bildet das neutrale Element

und der Vektor $-\vec{x} := \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix}$ den Gegenvektor zu $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

(c) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden die kanonische

Basis des Hyperraumes $\mathbb{R}^4$. Seine Dimension ist daher 4.

Übung 10.5

(a) Wir betrachten zwei quadratische Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) = ax^2 + bx + c$ bzw. $g(x) = rx^2 + sx + t$ mit $a, b, c, r, s, t \in \mathbb{R}$ definiert sein mögen und zwei Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
(\alpha f + \beta g)(x) &= (\alpha f)(x) + (\beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \\
&= \alpha(ax^2 + bx + c) + \beta(rx^2 + sx + t) \\
&= (\alpha a + \beta r)x^2 + (\alpha b + \beta s)x + (\alpha c + \beta t)
\end{aligned}
$$

Das bedeutet, dass die Linearkombination $\alpha f + \beta g$ wiederum eine quadratische Funktion ist; es gilt daher

$$\alpha f + \beta g \in Q_F, \quad \text{falls } f, g \in Q_F \text{ und } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Die Funktionenmenge Q_F ist abgeschlossen bezüglich der Addition und der Skalarmultiplikation.

Die Gültigkeit der Rechengesetze überträgt sich von $\mathbb{R}$ auf Q_F. Wir demonstrieren die Übertragung am Beispiel des Kommutativgesetzes:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Also ist die Gleichung $f + g = g + f$ immer richtig für $f, g \in Q_F$.

Neutral bzgl. der Addition ist die Funktion $n \in Q_F$, die durch $n(x) = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ definiert ist.

Definieren wir $(-f)(x) := -f(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, dann ist $-f$ die zu f inverse Funktion aus Q_F.

(b) Offenbar handelt es sich bei f_0, f_1 und f_2 um quadratische Funktionen. Jede quadratische Funktion $f \in Q_F$ kann mit Hilfe von f_0, f_1 und f_2 linear kombiniert werden:

Ist nämlich f gegeben durch $f(x) = ax^2 + bx + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

so gilt: $f(x) = a \cdot f_2(x) + b \cdot f_1(x) + c \cdot f_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Das heißt aber $f = a f_2 + b f_1 + c f_0$

Damit f_0, f_1 und f_2 tatsächlich eine Basis von $Q_{\mathcal{F}}$ bilden, müssen sie linear unabhängig sein. Wir betrachten die Funktionengleichung $a f_2 + b f_1 + c f_0 = n$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit

$$a f_2(x) + b f_1(x) + c f_0(x) = n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff a x^2 + bx + c \cdot 1 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat also unendlich viele Nullstellen. Das ist aber nur möglich, wenn keiner der Koeffizienten a, b, c von 0 verschieden ist.

~~Aus~~ Nach dem Nullvektorkriterium (10.7) sind die Funktionen f_0, f_1 und f_2 linear unabhängig und bilden daher eine Basis von $Q_{\mathcal{F}}$. Die Dimension von $Q_{\mathcal{F}}$ beträgt daher 3.

(c) Ist $f \in L_{\mathcal{F}}$ eine lineare Funktion, so gibt es $m, n \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = mx + n \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Offenbar dürfen wir $f(x) = 0 \cdot x^2 + mx + n \quad \forall x \in \mathbb{R}$ schreiben. Also gilt $f \in Q_{\mathcal{F}}$. Somit ist die Beziehung $L_{\mathcal{F}} \subset Q_{\mathcal{F}}$ gesichert.

Da die Linearkombination zweier linearer Funktionen wieder eine lineare Funktion ergibt, ist $L_{\mathcal{F}}$ ein Untervektorraum von $Q_{\mathcal{F}}$. Da die Funktionen f_0 und f_1 (siehe oben) eine Basis von $L_{\mathcal{F}}$ bilden, besitzt $L_{\mathcal{F}}$ die Dimension 2.

Übung 10.6

Seien die Punkte P, Q, R definiert durch

$$\vec{P} := \vec{A} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{Q} := \vec{A} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{R} := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Angenommen, P, Q und R wären Punkte von e.
Dann wären die Vektoren

$$\vec{AP} = -\vec{A} + \vec{P} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{AQ} = -\vec{A} + \vec{Q} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{AR} = -\vec{A} + \vec{R} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren von e. Nach Satz (10.1) müssten die drei Vektoren $\vec{AP}$, $\vec{AQ}$ und $\vec{AR}$ linear abhängig sein.
Das ist aber offensichtlich falsch. (siehe auch Beispiel (10.12))
Die Annahme $P, Q, R \in e$ ist daher widerlegt; mindestens einer der Punkte P, Q und R ist kein Punkt der Ebene e.

Übung 10.7

(a) $g: \vec{X} = \vec{M} + \lambda \vec{MS}$ mit $\vec{M} = \vec{A} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$

und $\vec{MS} = -\vec{M} + \vec{S} = -\vec{M} + \vec{A} + \vec{AS} = -\vec{A} - \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{A} + \frac{3}{4}\vec{a} + m\vec{b}$

$$= \frac{3}{4}\vec{a} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\vec{b} - \vec{c}$$

$AG: \vec{X} = \vec{A} + \mu \vec{AG}$ mit $\vec{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Da g und AG sich im Punkt T schneiden sollen, betrachten wir den Schnittpunktansatz

$$\vec{M} + \lambda \vec{MS} = A + \mu \vec{AG}$$

$$\Leftrightarrow \vec{A} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} + \lambda\left(\frac{3}{4}\vec{a} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{A} + \mu\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\lambda - \mu\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda - \mu\right)\vec{b} + \left(1 - \lambda - \mu\right)\vec{c} = \vec{O}$$

Da $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als linear unabhängig vorausgesetzt sind, ist die vorangehende Vektorgleichung nur erfüllt wenn die drei skalaren Koeffizienten verschwinden.

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \tfrac{3}{4}\lambda - \mu = 0 \\
&(2) \quad \left(m-\tfrac{1}{2}\right)\lambda - \mu = -\tfrac{1}{2} \\
&(3) \quad \lambda + \mu = 1
\end{aligned}$$

$(1)+(3): \quad \frac{7}{4}\lambda = 1 \iff \lambda = \frac{4}{7} \qquad (4)$

$(4)\to(3): \quad \frac{4}{7} + \mu = 1 \iff \mu = \frac{3}{7} \qquad (5)$

$(4),(5)\to(2): \quad \left(m-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{7} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{2} \iff \frac{4}{7}m - \frac{2}{7} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{2}$

$\iff \frac{4}{7}m = \frac{5}{7} - \frac{1}{2} \iff m = \frac{3}{14}\cdot\frac{7}{4} \iff m = \frac{3}{8}$

T teilt die Raumdiagonale AE im Verhältnis 3 : 4.
Der zugehörige Parameterwert für $\vec{AS}$ beträgt $m = \frac{3}{8}$

(b) Auf analoge Weise erhält man
das Teilverhältnis 2 : 5 und den Parameterwert $m = \frac{2}{5}$.

(c) Auf analoge Weise erhält man
das Teilverhältnis 1 : 5 und den Parameterwert $m = \frac{1}{10}$.