Elemente und Prinzipien der mathematischen Theorie

Bei diesem Paragraphen handelt es sich nicht um ein „Vorauskapitel“, das vor dem Einstieg in die Analytische Geometrie durchzuarbeiten wäre. Die Abhandlung hat eher den Charakter eines Glossars, auf das fallweise nach Bedarf zurückgegriffen werden kann.

Dennoch ist es hilfreich, das Glossar vorab zu lesen, um einen Überblick über sein Angebot zu gewinnen. Die in ihm aufgeführten Begriffe werden mit Beispielen erläutert, die aus der elementaren Zahlentheorie und der Mittelstufengeometrie entnommen sind. Für das Verständnis der Erläuterungen sind also keine Kenntnisse aus der Analytischen Geometrie erforderlich.

Im Übrigen beschränkt sich das Glossar nicht auf eine Hilfestellung für das Verständnis der Analytischen Geometrie; es ist für alle mathematischen Disziplinen gleichermaßen nützlich.

Liste der Artikel

(1) Axiom

Ein Axiom ist ein theoretischer Sachverhalt, der als uneingeschränkt gültig angesehen wird. Axiome bilden das Fundament einer mathematischen Theorie.

Die Axiome, die einer Theorie zugrunde liegen, werden im Rahmen dieser Theorie nicht hinterfragt - und natürlich auch nicht bewiesen!

Beispiel 1

Ein Axiom der Euklidischen Geometrie ist die Existenzaussage für Geraden:

- Zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q bestimmen stets eine Gerade g.

Beispiel 2

Ein Axiom der Lehre über die natürlichen Zahlen ist das „Prinzip der vollständigen Induktion“:

- Eine Aussage trifft ausnahmslos für alle natürlichen Zahlen zu, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:
  - Die Aussage trifft für die kleinste natürliche Zahl 1 zu.
  - Unter der Voraussetzung, dass die Aussage für eine natürliche Zahl n zutrifft, trifft sie auch für die nachfolgende natürliche Zahl n+1 zu.

Zum Prinzip der vollständigen Induktion gibt es weiter unten einen eigenen Artikel.

(2) Definition

In einer Definition („Abgrenzung“) werden von allen Objekten, die in einer Theorie betrachtet werden können, solche abgegrenzt, die bestimmte Bedingungen erfüllen oder bestimmte Eigenschaften haben.

Im Rahmen einer Definition werden in der Regel die Objekte, die von der Allgemeinheit abgegrenzt werden, mit einem Namen oder einer Bezeichnung versehen.

Um sprachlich zu unterstreichen, dass eine Definition im Aufbau einer Theorie einen willkürlichen Akt darstellt, wird sie häufig im Konjunktiv formuliert.

Beispiel 1

Eine Definition aus der Euklidischen Geometrie der Ebene ist die Abgrenzung der rechtwinkligen Dreiecke von der Allgemeinheit aller Dreiecke:

- Ein Dreieck heiße rechtwinklig, wenn zwei seiner drei Seiten einen rechten Winkel bilden, das heißt, senkrecht aufeinander stehen.

Beispiel 2

Eine Definition aus der Zahlentheorie ist die Abgrenzung der Primzahlen von der Allgemeinheit aller natürlicher Zahlen:

- Eine natürliche Zahl heiße „Primzahl“, wenn sie genau zwei Teiler, nämlich 1 und sich selbst, besitzt.

(3) Lehrsatz („Satz“) – Implikation

In einem (Lehr-)Satz wird ein theoretischer Schluss formuliert, dessen Korrektheit normalerweise nicht offenkundig, sondern nachvollziehbar zu begründen ist.

Meist handelt es sich, grammatikalisch betrachtet, um ein Satzgefüge aus Konditional- und Hauptsatz:

Wenn die Aussage A gilt, dann gilt auch die Aussage B.

Ein solches Satzgefüge wird als „Implikation“ bezeichnet. Die im Konditionalsatz angeführte Aussage A wird „Voraussetzung“, die im Hauptsatz angeführte Aussage B „Behauptung“ des Lehrsatzes genannt.

Aus sprachlichen Gründen werden häufig Satzkonstruktionen gewählt, die die Voraussetzung und die Behauptung weniger klar herausstellen. Diese lassen sich aber stets in die, zugegebenermaßen, etwas steife Form „Wenn ..., dann ... .“ überführen:

- Aussage B ist richtig, falls die Aussage A erfüllt ist.
- Gegeben sei die Aussage A; dann gilt die Aussage B.
- Aussage B ist, wenn die Aussage A gegeben ist, ebenfalls wahr.

Jede sprachliche Variation ist akzeptabel, wenn nur die Voraussetzungen und die sich aus diesen Voraussetzungen ergebenden Behauptungen gedanklich einwandfrei isolieren und identifizieren lassen.

Beispiel 1 („Basiswinkelsatz“ der Euklidischen Geometrie)

Ein bekannter Lehrsatz aus der Euklidischen Geometrie der Ebene lautet:

- In gleichschenkligen Dreiecken sind die Basiswinkel gleich groß.

Deutlicher getrennt werden Voraussetzung und Behauptung in der Standardformulierung:

- Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann sind seine Basiswinkel gleich groß.

Beispiel 2 („Summensatz“ der Teilbarkeitslehre)

Ein schlichter Sachverhalt aus der Teilbarkeitslehre lautet:

- Die Summe zweier durch die Zahl q teilbarer natürlicher Zahlen a und b besitzt ebenfalls den Teiler q.

Deutlicher getrennt werden Voraussetzung und Behauptung in der Standardformulierung:

- Wenn zwei natürliche Zahlen a und b den Teiler q besitzen, dann ist auch die Summe a + b durch q teilbar.

(4) Kehrsatzes eines Lehrsatzes

Werden in einer Implikation Voraussetzung und Behauptung getauscht, entsteht eine neue Implikation, die „Kehrsatz“ genannt wird.

- Satz: Wenn Aussage A gilt, dann gilt auch Aussage B.
- Kehrsatz: Wenn Aussage B gilt, dann gilt auch Aussage A.

Die Gültigkeit eines Kehrsatzes ist zu prüfen; sie ergibt sich nicht aus der Gültigkeit des Lehrsatzes, dessen Umkehrung sie ist!

Beispiel 1

Der Kehrsatz des Basiswinkelsatzes (siehe Artikel (3), Beispiel 1) lautet:

- Wenn in einem Dreieck zwei Innenwinkel gleich groß sind, dann ist es ein gleichschenkliges Dreieck.

Der Kehrsatz des Basiswinkelsatzes ist ebenso gültig, wie der Basiswinkelsatz selbst.

Beispiel 2

Der Kehrsatz des Summensatzes (siehe Artikel (3), Beispiel 2) lautet:

- Wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen a und b den Teiler q besitzt, dann sind auch die Zahlen a und b durch q teilbar.

Dieser Kehrsatz ist falsch. Das zeigt das „Gegenbeispiel“ $a = 5$, $b = 3$, $q = 2$.

Der Begriff „Gegenbeispiel“ wird weiter unten in einem eigenen Artikel erläutert.

(5) Kontraposition eines Lehrsatzes

Im Unterschied zum Kehrsatz entsteht kein logisch neuer Sachverhalt, wenn beim Tauschen von Voraussetzung und Behauptung beide Aussagen negiert werden:

- Satz: Wenn die Aussage A gilt, dann gilt auch die Aussage B.
- Kontraposition: Wenn die Aussage B nicht gilt, dann gilt auch die Aussage A nicht.

Dass die beiden Implikationen logisch äquivalent sind, ist leicht einzusehen. Dazu zeigen wir im ersten Schritt, dass sich aus der Gültigkeit des Lehrsatz die Gültigkeit der Kontraposition ergibt:

Wir gehen also davon aus, dass der originale Satz gültig ist. Wenn dann die Aussage B nicht gilt, kann auch die Aussage A nicht gelten.

Denn wenn die Aussage A doch richtig wäre, obwohl die Aussage B nicht gilt, würde aus dem originalen Satz die Korrektheit der Aussage B folgen.

Das würde aber bedeuten, dass sich aus der Ungültigkeit der Aussage B ihre Gültigkeit ergeben würde. Eine Aussage kann aber nicht zugleich gültig und ungültig sein!

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass aus der Gültigkeit der Kontraposition eines Satzes auf die Gültigkeit des originalen Lehrsatzes geschlossen werden darf:

Wir gehen dabei davon aus, dass die Kontraposition des Satzes gültig ist. Im ersten Schritt hatten wir soeben erläutert, dass das Bilden der Kontraposition einer Implikation logisch einwandfrei ist. Also bilden wir die ...

- Kontraposition der Kontraposition: Wenn nicht die Aussage A nicht gilt, dann gilt auch nicht die Aussage B nicht.

Offensichtlich ist die Kontraposition der Kontraposition nichts anderes als der originale Lehrsatz, da sich zwei aufeinanderfolgende Negationen neutralisieren:

- Kontraposition der Kontraposition: Wenn die Aussage A gilt, dann gilt auch die Aussage B.

Bei dem letzten Argument verlassen wir uns darauf, dass ein logischer Sachverhalt nur entweder „gültig“ oder „ungültig“ sein kann. Andernfalls dürften wir den Schluss von „nicht ungültig“ auf „gültig“ nicht vornehmen (siehe Artikel (7)).

Die Kontraposition eines Lehrsatzes spielt in der Beweistechnik eine große Rolle. Oft kann die Kontraposition eines Satzes leichter als die originale Implikation bewiesen werden.

Beispiel 1

Die Kontraposition des Basiswinkelsatzes (siehe Artikel (3), Beispiel 1) lautet:

- Wenn in einem Dreieck keine zwei Innenwinkel gleich groß sind, dann ist es kein gleichschenkliges Dreieck.

Beispiel 2

Die Kontraposition des Summensatzes (siehe Artikel (3), Beispiel 2) lautet:

- Wenn die Summe zweier Zahlen a und b nicht durch die Zahl q teilbar ist, dann ist mindestens eine der beiden Zahlen a und b nicht durch q teilbar.

Beachte, dass die Negation von „beide Zahlen teilbar“ nicht etwa „beide Zahlen nicht teilbar“ ist. Die korrekte Negation von „beide Zahlen teilbar“ ist „nicht beide Zahlen teilbar“, und das heißt, „mindestens eine Zahl ist nicht teilbar“.

(6) Kontraposition des Kehrsatzes eines Lehrsatzes

Da der Kehrsatz eines Lehrsatzes wiederum eine Implikation ist, kann selbstverständlich auch von diesem die Kontraposition gebildet werden:

- Satz: Wenn die Aussage A gilt, dann gilt auch die Aussage B.
- Kehrsatz: Wenn die Aussage B gilt, dann gilt auch die Aussage A.
- Kontraposition des Kehrsatzes: Wenn die Aussage A nicht gilt, dann gilt auch die Aussage B nicht.

Es wird hier klar, dass das Einschieben von Negationen in eine Implikation logisch äquivalent zum Bilden des Kehrsatzes ist.

Beispiel 1

Der Kontraposition des Kehrsatzes des Basiswinkelsatzes (siehe Artikel (3), Beispiel 1) lautet:

- Wenn ein Dreieck nicht gleichschenklig ist, dann sind in dem Dreieck keine zwei Innenwinkel gleich groß.

Dieser Satz ist richtig, weil der Kehrsatz des Basiswinkelsatzes gilt.

Beispiel 2

Die Kontraposition des Kehrsatzes des Summensatzes (siehe Artikel (3), Beispiel 2) lautet:

- Wenn mindestens eine der beiden Zahlen a und b nicht durch die Zahl q teilbar ist, dann ist auch die Summe a + b nicht durch die Zahl q teilbar.

Dieser Satz ist falsch, weil der Kehrsatz des Summensatzes nicht gilt.

(7) Axiom vom ausgeschlossenen Dritten

Der „gewöhnlichen“ Mathematik liegt die „zweiwertige Logik“ und mit dieser das „Axiom vom ausgeschlossenen Dritten“ zugrunde:

- Ein Aussage ist entweder wahr oder falsch, das heißt, wenn eine Aussage nicht wahr ist, dann ist sie falsch, und wenn sie nicht falsch ist, dann ist sie wahr.

Es gibt also keinen dritten Wahrheitswert neben „wahr“ und „falsch“. Für eine mathematische Implikation bedeutet das, sie gilt oder sie gilt nicht.

Selbstverständlich gibt es mathematische Aussagen, deren Wahrheitsgehalte (bisher!) nicht bekannt sind, wie beispielsweise die „Starke Goldbachsche Vermutung “.

> Beispiel („Starke Goldbachsche Vermutung“)
> - Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.
>
> Bis heute ist nicht entschieden, ob diese Aussage wahr oder falsch ist. Das ist aber kein Verstoß gegen das Axiom vom ausgeschlossen Dritten, weil die Mathematik davon ausgeht, dass die Goldbachsche Vermutung entweder wahr oder falsch sein muss, ohne dass wir bislang (Stand: Letztes Änderungsdatum dieser Webseite) wissen, welches Attribut tatsächlich zutrifft.

Der Axiom vom ausgeschlossenen Dritten wird benötigt, um die logische Äquivalenz einer „Implikation“ mit ihrer „Kontraposition“ zu begründen (siehe Artikel (5)).

Außerdem beruht die Gültigkeit eines Widerspruchsbeweises ebenfalls auf diesem logischen Axiom (siehe auch Artikel (12)).

(8) Lehrsatz („Satz“) – Äquivalenz

Sind ein Satz und sein Kehrsatz gültig, dann können die beiden Sätze zu einer Äquivalenzaussage zusammengefasst werden. Aus den beiden Sätzen

- Wenn die Aussage A gilt, dann gilt auch die Aussage B.
- Wenn die Aussage B gilt, dann gilt auch die Aussage A.

wird

- Die Aussage A gilt genau dann, wenn die Aussage B gilt.

oder

- Die Aussage B gilt genau dann, wenn die Aussage A gilt.

Da die beiden Aussagen A und B logisch äquivalent sind, ist es gleichgültig, welche der beiden im ersten und welche der beiden im zweiten Halbsatz genannt wird.

> Beispiel 1
>
> Da sowohl der Basiswinkelsatz für Dreiecke als auch seine Umkehrung korrekt sind, dürfen die beiden Implikationen wie folgt zusammengefasst werden:
>
> - In einem Dreieck sind **genau dann** zwei Innenwinkel gleich groß, **wenn** es ein gleichschenkliges Dreieck ist.
>
> Alternativ darf auch umgekehrt formuliert werden:
>
> - Ein Dreieck ist **genau dann** gleichschenklig, **wenn** zwei seiner Innenwinkel gleich groß sind.

> Beispiel 2
>
> Da der Kehrsatzes des Summensatzes (siehe Artikel (3), Beispiel 2) falsch ist, ist die folgende Äquivalenz ungültig:
>
> - Die Summe zweier Zahlen a und b ist genau dann durch die Zahl q teilbar, wenn beide Summanden jeweils durch die Zahl q teilbar sind.

Zur Prüfung einer Äquivalenzaussage sind in der Regel zwei Implikationen (Satz und Kehrsatz) separat zu beweisen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit kann der Beweis wie folgt aufgebaut werden:

> Beweis einer Äquivalenz
>
> Lehrsatz: Die Aussage A gilt genau dann, wenn die Aussage B gilt.
>
> Beweis:
>
> „ß “:
>
> Gelte die Aussage A. Zu zeigen ist, dass unter dieser Voraussetzung auch die Aussage B richtig ist.
>
> „¶ “:
>
> Gelte die Aussage B. Zu zeigen ist, dass unter dieser Voraussetzung auch die Aussage A korrekt ist.

Selbstverständlich können beim Beweis einer Äquivalenzaussage auch logischen Varianten (Kontraposition, Widerspruchsbeweis, ...) zur Anwendung kommen.

(9) Theorem, Lemma, Korollar, Bemerkung

Theoretische Aussagen, die ihrem Wesen nach Lehrsätze sind, werden fallweise begrifflichen Unterkategorien zugeordnet, um ihren Stellenwert in der Entwicklung der Theorie zu verdeutlichen.

- Ein **Theorem** ist ein Lehrsatz, der für die Theorie von hervorragender Bedeutung ist.

Beispiel („Tangententheorem“)

- Gegeben seien ein Kreis, eine Gerade und ein gemeinsamer Punkt dieser beiden Figuren. Dann gilt: Die Gerade ist genau dann eine Tangente des Kreises, wenn sie senkrecht auf der Zentralen des Kreises steht, die durch den gemeinsamen Punkt verläuft.

Dieses so genannte „Tangententheorem“ ist in der Situation „Kreis und Gerade“ von zentraler Bedeutung, weil es ein handliches Kriterium für die Konstruktion oder Identifikation von Tangenten liefert.

- Ein **Lemma** ist ein Hilfssatz, der den gedanklichen Weg zu wenigstens einem bedeutenden Lehrsatz ebnet.

Beispiel („Lemma von Euklid“)

- Ist ein Produkt zweier natürlichen Zahlen a und b durch eine Primzahl p teilbar, dann muss bereits eine der beiden Zahlen durch p teilbar sein.

Dieses Lemma wird in der Zahlentheorie verwendet, um das zentrale Theorem über die Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen zu beweisen.

- Ein **Korollar** ist ein Lehrsatz, der sich „wie ein Geschenk“ ohne großen Beweisaufwand als Folgerung aus einem zuvor bewiesenen Lehrsatz ergibt.

Beispiel („Höhensatz“)

- In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe h gleich dem Produkt aus den beiden Abschnitten p und q, in die die Hypotenuse von der Höhe unterteilt wird: $h^2 = p \cdot q$

Dieser Satz ergibt sich durch eine kurze Rechnung aus dem Satz des Pythagoras.

- Eine **Bemerkung** ist ein Lehrsatz von untergeordneter Bedeutung, der einen eher beiläufigen, gedanklich unterstützenden Charakter hat.

Beispiel („Nachbarwinkelsatz“)

- Werden zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten, so sind die dadurch gebildeten Nachbarwinkel supplementär, das heißt, sie ergänzen sich zu 180°.

Die beiden bedeutenden Lehrsätze der Drei-Geraden-Figur sind der Stufen- und der Wechselwinkelsatz. Die Aussage zu den Nachbarwinkeln, die sich im Übrigen direkt aus dem Stufenwinkelsatz unter Verwendung des Nebenwinkelsatzes ergibt, hat nebensächlichen Charakter.

(10) Beweis eines Lehrsatzes

Ein Lehrsatz wird bewiesen, indem eine Kette logisch einwandfreier Schlüsse konstruiert wird, an deren Ende die Behauptung des Satzes steht. Die Schlusskette darf ausschließlich an die in der Voraussetzung des Satzes gegebenen Bedingungen und an die bereits gesicherten Erkenntnisse der Theorie anknüpfen oder diese im Verlauf des Schließens einbeziehen. Gesicherte Erkenntnisse sind:

- Axiome der Theorie
- Implikationen bewiesener Lehrsätze
- Allgemeingültige Aussagen
- Gültige logische Prinzipien

Beispiel (Beweis des „Summensatzes" der Teilbarkeitslehre)

Summensatz:

- Wenn zwei natürliche Zahlen a und b jeweils den Teiler q besitzen, dann ist auch die Summe a + b durch q teilbar.

Beweis:

1. Es wird vorausgesetzt, dass die natürliche Zahl a den Teiler q besitzt.
2. Aus dieser Voraussetzung folgt gemäß Definition des Begriffs „Teiler", dass es eine natürliche Zahl u mit der Eigenschaft $a = u \cdot q$ gibt.
3. Es wird weiterhin vorausgesetzt, dass die natürliche Zahl b ebenfalls den Teiler q besitzt.
4. Aus dieser Voraussetzung folgt gemäß der Definition des Begriffs „Teiler", dass es eine natürliche Zahl v mit der Eigenschaft $b = v \cdot q$ gibt.
5. Die Feststellungen (2) und (4) erlauben es, die Summe a + b der Zahlen a und b wie folgt zu darzustellen:
   $$a + b = u \cdot q + v \cdot q$$
6. Die Addition und die Multiplikation natürlicher Zahlen erfüllen das Distributivgesetz.
7. Aus den Feststellungen (5) und (6) folgt: $a + b = (u + v) \cdot q$
8. Weil u und v natürliche Zahlen sind und die Addition nicht aus der Menge der natürlichen Zahlen hinausführt, ist gesichert, dass die Zahl u + v wiederum eine natürliche Zahl ist.
9. Also folgt aus der Feststellung (7), dass die Zahl q ein Teiler der Zahl a + b ist.

Der Leser wird die Ausführung des Beweises mit Recht als übertrieben kleinschrittig und pedantisch empfinden. In der Tat würde in einem Lehrbuch mit der folgenden Fassung weniger Aufhebens gemacht:

Beispiel („Normalfassung" des Beweises des Summensatzes)

Weil die Zahlen a und b nach Voraussetzung jeweils den Teiler q besitzen, gibt es natürliche Zahlen u und v mit der Eigenschaft $a = u \cdot q$ und $b = v \cdot q$.

Mit Hilfe des Distributivgesetzes ergibt sich sofort $a + b = u \cdot q + v \cdot q = (u + v) \cdot q$.

Also ist die Summe a + b ebenfalls durch q teilbar.

Beim Vergleich der beiden Beweisfassungen wird deutlich, dass logische Anleihen an „Selbstverständlichkeiten" wie beispielsweise die Gültigkeit des Distributivgesetzes für die Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen normalerweise nicht erwähnt werden.

Der Beweisführende verlässt sich mit kommunikativem Feingefühl darauf, dass der Leser die vielen kleinen logischen Lücken, die ein knapp geführter Beweis lässt, kongenial selbständig füllt.

(11) Widerlegung eines Lehrsatzes durch ein Gegenbeispiel

Eine Implikation der Form

- Wenn die Aussage A zutrifft, dann gilt auch die Aussage B.

ist prinzipiell eine „All-Aussage“ in dem folgenden Sinne:

- **In allen Fällen**, in denen die Aussage A zutrifft, trifft auch die Aussage B zu.

Die zweite Formulierung macht deutlich, dass eine Implikation grundsätzlich keine Ausnahmen zulässt. Sind Ausnahmen zu berücksichtigen, müssen diese bereits Bestandteil der Voraussetzung sein!

> Beispiel
> - Wenn p eine Primzahl, aber nicht die Zahl 2 ist, dann ist p eine ungerade Zahl.
>
> In dieser Implikation besteht die Voraussetzung nicht etwa in der schlichten Aussage „p ist eine Primzahl“, sondern in der verknüpften Aussage „p ist eine Primzahl“ und „p ist von der Zahl 2 verschieden“.

Eine All-Aussage ist schon dann falsch, wenn sie in wenigstens einem Fall nicht zutrifft. Also ist ein Lehrsatz schon dann widerlegt, wenn ein Fallbeispiel angegeben werden kann, in dem zwar die Voraussetzung, aber nicht die Behauptung zutrifft. Ein solches Fallbeispiel nennt die Mathematik „Gegenbeispiel“.

> Beispiel
> - Wenn p eine Primzahl, dann ist p eine ungerade Zahl.
>
> Der Fall „p = 2“ ist ein Gegenbeispiel zu dieser (falschen) Implikation: 2 ist zwar eine Primzahl, aber 2 ist keine ungerade Zahl. Das Gegenbeispiel „p = 2“ falsifiziert die Aussage.

---

(12) Indirekter Beweis

Ein Lehrsatz (Implikation) darf im Rahmen der zweiwertigen Logik auch dadurch bewiesen werden, dass unter Beibehaltung der Voraussetzung gezeigt wird, dass das logische Gegenteil der Behauptung nicht zutreffen kann, weil die Annahme des Gegenteils der Behauptung zu einem logischen Widerspruch führt.

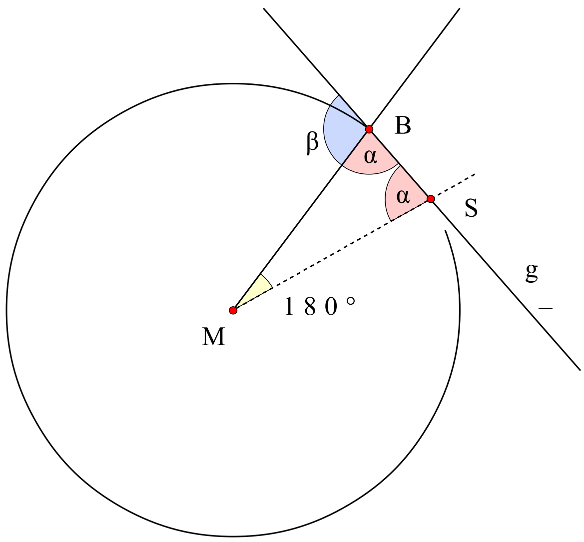
Aufbau eines indirekten Beweises der Implikation „Wenn die Aussage A zutrifft, dann gilt auch die Aussage B.“:

- Die Voraussetzung „Die Aussage A trifft zu“ sei gegeben.
- Dann wird angenommen, die Aussage B träfe unter der vorgenannten Voraussetzung nicht zu.
- Aus dieser Annahme ergeben sich (nach den Prinzipien der Logik) eine Reihe von Schlüssen.
- Gesucht wird ein Schluss, der auf einen logischen Widerspruch (zur Voraussetzung, zur Annahme, zu einer bereits gesicherten Erkenntnis, zu einem gültigen logischen Prinzip etc.) führt.
- Wird dieser Widerspruch gefunden, muss die Annahme falsch sein, weil sich aus einem gültigen Sachverhalt kein Widerspruch ergeben darf.
- Wenn aber die Annahme, die Aussage B träfe nicht zu, falsch ist, muss die Aussage B gültig sein!

Beispiel („Tangententheorem“)

- Wenn eine Gerade eine Tangente eines Kreises ist, dann steht sie senkrecht auf der Zentralen des Kreises, die durch den Berührpunkt der Tangente verläuft.

Mit den Bezeichnungen, die durch die nebenstehende Illustration gegeben sind, wird der folgende indirekte Beweis geführt:



Es sei vorausgesetzt, dass die Gerade g eine Tangente des Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ist. Der Kreispunkt B sei der Berührpunkt von g.

Angenommen, die Gerade g stünde nicht senkrecht auf der Zentralen MB.

Dann sind die beiden mit α und β gekennzeichneten Schnittwinkel, die von der Geraden g und der Zentralen MB gebildet werden, keine rechten Winkel.

Da α und β als Nebenwinkel supplementär sind, das heißt, ihre Winkelsumme 180° beträgt, muss einer der beiden Winkel kleiner und der andere größer als 90° sein. Gelte o.B.d.A. $\alpha < 90°$.

[Anmerkung: „o.B.d.A.“ soll heißen: Diese Wahl ist keine Einschränkung der Gültigkeit des Beweises. Ist β der kleinere Winkel, werden die Namen der Winkel ausgetauscht. (siehe auch Artikel(14))]

Sei z die Zentrale, die mit MB bei M einen Winkel von $180° - 2\alpha$ bildet. Diese Zentrale z schneidet die Gerade g in einem Punkt S. Die Zentrale z kann nicht parallel zur Geraden g verlaufen, weil zwei Nachbarwinkel in der Drei-Geraden-Figur, bestehend aus g, z und MB, die Größe α und $180° - 2\alpha$ haben und daher garantiert nicht supplementär sind.

In dem Dreieck MSB hat der Innenwinkel bei S die Größe $180° - (\alpha + (180° - 2\alpha)) = \alpha$.

Weil nun die Innenwinkel bei S und B gleich groß sind, muss es sich bei dem Dreieck MSB um ein gleichschenkliges Dreieck handeln. Das bedeutet aber, dass $\overline{MS} = \overline{MB} = r$ gilt. Also liegt der Punkt S nicht nur auf der Geraden g, sondern auch auf dem Kreis.

Daraus folgt wiederum, dass die Gerade g neben B einen zweiten gemeinsamen Punkt mit dem Kreis besitzt. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, in der festgelegt wurde, dass die Gerade g eine Tangente sein soll.

Die Annahme, die Gerade g stünde nicht senkrecht auf der Zentralen MB, muss falsch sein.

Daraus ergibt sich letztlich, dass die Behauptung des Satzes gültig ist.

Im Nachtrag zur Ausführung des Beweises müssen wir leider zugeben, dass es sich bei dem vorgetragenen Beispiel nicht wirklich um einen indirekten Beweis, sondern um einen direkten Beweis der Kontraposition des Satzes handelt:

- Wenn eine Gerade, die durch einen Kreispunkt verläuft, nicht senkrecht auf der zu diesem Kreispunkt gehörenden Zentralen steht, dann ist sie keine Tangente des Kreises.

Echte indirekte Beweise liegen immer dann nicht vor, wenn aus der Annahme, die Behauptung des Satzes gälte nicht, gefolgert wird, dass die Voraussetzung des Satzes falsch sein muss. In solchen Fällen wird in Wahrheit ein (direkter) Beweis der Kontraposition geführt.

Ein echter indirekter Beweis konstruiert einen Widerspruch „außerhalb der Voraussetzung“. Das berühmteste Beispiel ist der Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$. Wir geben diesen hier nicht wieder, weil er überall zu finden ist.

(13) Vollständige Induktion

Das „Prinzip der vollständigen Induktion“ ist ein konstitutives Axiom der Menge der natürlichen Zahlen. In seiner Standardformulierung besagt es:

- Eine Aussage trifft auf alle natürlichen Zahlen zu, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:
  - Die Aussage trifft auf die erste natürliche Zahl 1 (bzw. 0) zu.
  - Wenn die Aussage auf irgendeine natürliche Zahl n zutrifft, dann trifft sie auch auf ihren Nachfolger n+1 zu.

Hinter diesem Prinzip steckt die Vorstellung, dass die natürlichen Zahlen wie eine unendliche Rallye von Dominosteinen aufgestellt sind. Damit die Domino-Rallye funktioniert, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

- Der erste Dominostein wird umgestoßen.
- Die Dominosteine sind so aufgestellt, dass jeder fallende Dominostein auch seinen Nachfolger zum Fallen bringt.

Beispiel („Gaußsche Summenformel“)

- Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen 1 + 2 + ... + n wird durch den Wert der Formel $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ geliefert.

Beweis:

1. „Induktionsanfang“: Die Behauptung gilt für n = 1
   Für n = 1 hat die Summe der ersten n natürlichen Zahlen den Wert 1, denn sie besteht nur aus dem einzigen Summanden 1.
   Die Formel $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ liefert für n = 1 auch den Wert $\frac{1\cdot(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$.
   Also ist die Behauptung für $n = 1$ richtig.

2. „Induktionsschritt“: Wenn die Behauptung für eine natürliche Zahl n richtig ist, dann gilt sie auch für n+1.
   Wir betrachten die Summe $1 + ... + n + (n+1) = (1 + ... + n) + (n+1)$.
   Da wir voraussetzen, dass die Behauptung für die natürliche Zahl n richtig ist, gilt:

$$(1+...+n)+(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)}{2}+\frac{2\,(n+1)}{2}=\frac{(n+2)\,(n+1)}{2}=\frac{(n+1)\,[(n+1)+1]}{2}$$

   Also gilt die Behauptung tatsächlich auch für den Nachfolger (n+1), falls sie für die natürliche Zahl n gilt.

Die sprachliche Gestaltung des Beispiels verdeutlicht, dass im Induktionsschritt die Gültigkeit der Behauptung für eine natürliche Zahl n nicht etwa nachgewiesen, sondern vielmehr vorausgesetzt wird, um die Gültigkeit der Behauptung für ihren Nachfolger (n+1) zu zeigen.

(14) o.B.d.A.

In vielen Beweisen wird aus einer Menge gleichrangiger Elemente eines willkürlich herausgegriffen, um mit diesem den Gedankengang fortzusetzen. Diese Auswahl wird mit dem Attribut „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ versehen, wenn sie nicht zu logischen Einbußen hinsichtlich des Beweiszieles führt, weil der Gedankengang auch mit jedem anderen Element der Menge in völlig analoger Weise ausgeführt werden könnte.

Der Gedankengang könnte sogar für jedes andere Element in identischer Weise wiederholt werden, wenn die Bezeichnungen der Elemente passend ausgetauscht würden.

Beispiel („Winkel-Seite-Beziehung im Dreieck“)

- Sind in einem Dreieck zwei Seiten unterschiedlich lang, so liegt der längeren Seite stets der größere Winkel gegenüber.

Beweis:

Betrachtet wird ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C, das der Voraussetzung des Satzes genügt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit („O.B.d.A.“) wird die Bezeichnung so gewählt, dass die Seiten $a = \overline{BC}$ und $b = \overline{AC}$ unterschiedlich lang sind.

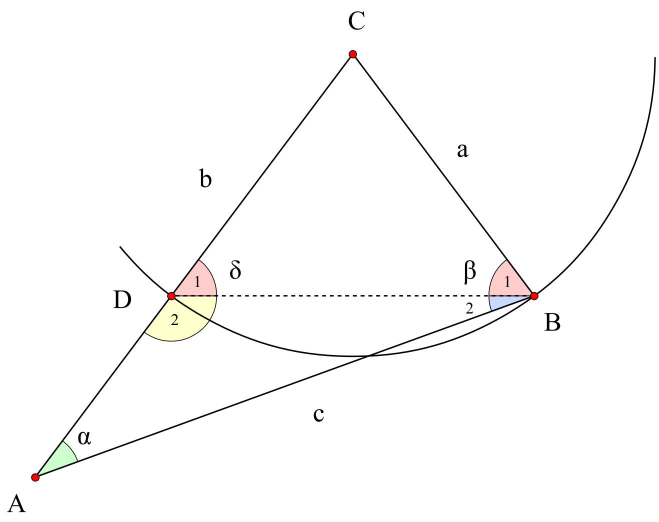
Weiterhin wird o.B.d.A. davon ausgegangen, dass $b > a$ gilt.

Diese Annahmen sind in die nebenstehenden Beweisfigur übernommen.

Die weiteren Ausführungen erfolgen mit den in der Figur gewählten Bezeichnungen.

Da a kürzer als b ist, schneidet der Kreis um den Eckpunkt C mit dem Radius a die Seite b in einem Punkt D.

Da das Dreieck ADB gleichschenklig ist, sind die Winkel δ_1 und β_1 gleich groß.



Mit Hilfe des Winkelsummensatzes für Dreiecke sowie des Nebenwinkelsatzes für Geradenkreuzungen folgt:

$$\alpha = 180° - \delta_2 - \beta_2 = 180° - (180° - \delta_1) - \beta_2 = \delta_1 - \beta_2 = \beta_1 - \beta_2 < \beta_1 + \beta_2 = \beta$$

(15) Quantoren und ihre Negationen

In der Mathematik werden oft Aussagen getroffen, die für alle oder für mindestens ein Element einer Menge von Objekten gelten sollen. Diese Aussagen werden Allaussagen beziehungsweise Existenzaussagen genannt.

Um diese Aussagen knapp und übersichtlich zu formulieren, werden die Quantoren $\forall$ („für alle“) beziehungsweise $\exists$ („es existiert (mindestens) ein“) verwendet.

Beispiele

(1) Bei allen natürliche Zahlen n ist ihr Quadrat n^2 mindestens so groß wie die Zahl selbst, kurz:
$\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 \geq n$

(2) Es gibt eine natürliche Zahl n, deren Quadrat doppelt so groß wie die Zahl selbst ist, kurz:
$\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 = 2n$

Bei dieser Gelegenheit ist anzumerken, dass bei einer Verneinung einer Allaussage eine Existenzaussage und bei einer Negation einer Existenzaussage eine Allaussage entsteht.

Ist nämlich $\mathfrak{M}$ eine Menge von Dingen, dann ist die logisch korrekte Verneinung der Allaussage

„ $\forall\, d \in \mathfrak{M}$ trifft die Aussage A zu“

nicht etwa die Allaussage „ $\forall\, d \in \mathfrak{M}$ trifft die Aussage A nicht zu“,
sondern die Existenzaussage „ $\exists\, d \in \mathfrak{M}$, für das die Aussage A nicht zutrifft“.

Ebenso ist die korrekte logische Verneinung der Existenzaussage

„ $\exists\, d \in \mathfrak{M}$, für das die Aussage A zutrifft“.

nicht etwa die Existenzaussage „ $\exists\, d \in \mathfrak{M}$, für das die Aussage A nicht zutrifft“,
sondern die Allaussage „ $\forall\, d \in \mathfrak{M}$ trifft die Aussage A nicht zu“.

Beispiele

(1) Die folgenden beiden Aussagen sind logisch äquivalent:
- **Nicht alle** Primzahlen sind ungerade.
- **Es gibt** eine Primzahl, die **nicht** ungerade (also gerade) ist.

(2) Die folgenden beiden Aussagen sind logisch äquivalent:
- **Es gibt nicht** eine reelle Zahl r, die die Gleichung $r^2 = -1$ löst.
- **Alle** reelle Zahlen lösen die Gleichung $r^2 = -1$ **nicht**.