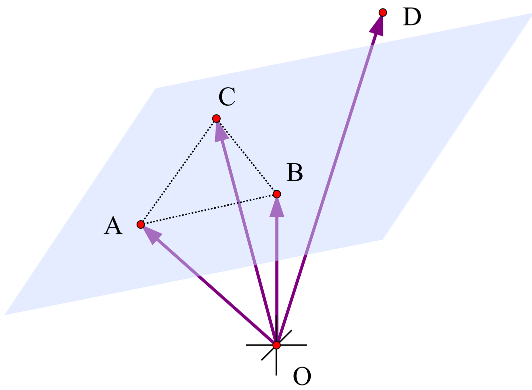
§9 Ebenen im Modellraum

Eine Gerade stellen wir uns als eendlose, unendlich dünne, nicht gekrümmte Linie vor, deren Punkte wie bei einer Perlenkette (allerdings ohne Unterbrechungen, also kontinuierlich!) aufeinander folgen, nie aber in Paaren oder Grüppchen „nebeneinander" liegen. Eine Gerade hat zwar eine unendliche longitudinale, aber keine laterale (seitliche) Ausdehnung; sie idealisiert unsere Vorstellung von einem ultrafeinen Lichtstrahl.



Analog dazu stellen wir uns eine Ebene als eine endlose, unendlich dünne nicht gewölbte, „beulenfreie" Fläche vor, deren Punkte nun zwar auch seitlich nebeneinander, nicht aber „übereinander" liegen dürfen. Eine Ebene hat in unserer Vorstellung eine unendliche longitudinale und laterale, aber keine vertikale Ausdehnung.

So wie wir in §5, ausgehend von unserer Anschauung, mit vektoriellen Mitteln Modelle von Geraden im Modellraum $\mathbb{R}^3$ erschaffen haben, werden wir nun, ebenfalls von unserer Anschauung ausgehend, Modelle von Ebenen erschaffen. Unter anderem wird dadurch auch nachträglich die Unterscheidung zwischen ebenen und nicht ebenen Vierecken auf eine solide allgemeine Grundlage gestellt (Zur Erinnerung: Vierecke wurden provisorisch als „eben" definiert, wenn ihre Diagonalengeraden nicht windschief sind, sondern sich in genau einem Punkt schneiden oder parallel verlaufen).

Dreiecke sind nach unserer Anschauung immer „eben". Unsere Alltagserfahrung sagt uns, dass ein dreibeiniger Hocker nicht wackeln kann, wohingegen ein vierbeiniger Tisch fast immer wackelt, weil entweder der Fußboden „uneben" ist oder die vier Füße der möglicherweise unterschiedlich langen Tischbeine „nicht in einer Ebene liegen".

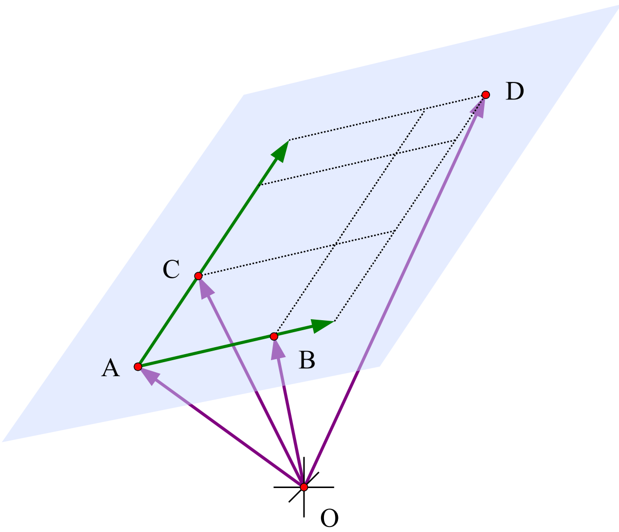
Aus unserer Anschauung übertragen wir daher in die Modellbildung, dass drei nicht kollineare Punkte A, B und C eine Ebene definieren sollen. Wählen wir o.B.d.A. den Punkt A als Stützpunkt der Ebene, so erhalten wir die anderen beiden Punkte durch eine von A ausgehende Bewegung:

$$\vec{B} = \vec{A} + \overrightarrow{AB} \text{ und } \vec{C} = \vec{A} + \overrightarrow{AC}$$

Unsere Anschauung nach verlaufen diese Bewegungen innerhalb der gedachten Ebene und verlassen diese auch nicht, wenn wir sie verlängern, verkürzen, umkehren oder kombinieren. Wir sollten also immer einen Ebenenpunkt X erhalten, wenn wir, ausgehend vom Stützpunkt A, die beiden Bewegungen **linear kombinieren**, das heißt, mit reellen Skalaren λ und μ den Ortsvektor wie folgt bilden:

$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$$

Im Fall $\lambda = \mu = 1$ wird, wie wir wissen, das Dreieck zu einem (ebenen) Parallelogramm ergänzt.



<u>(9.1) Definition</u>

Seien A, B und C drei nicht kollineare Punkte des Modellraumes.

Dann heiße die Punktmenge

$$ABC := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}\}$$

Ebene durch die Punkte A, B und C.

Die Gleichung $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$ heiße *Punktrichtungsgleichung* der Ebene ABC.

Anstelle von $ABC := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}\}$ schreiben wir zukünftig kurz

$ABC : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$.

Um die Tragfähigkeit dieser vektoriell-analytischen Definition des Ebenenbegriffs zu erkunden, führen wir eine „Punktprobe“ durch. Es handelt sich um die Grundaufgabe, für einen Punkt P die Zugehörigkeit zu einer Ebene zu überprüfen, die durch drei Punkte A, B, C festgelegt ist.

<u>(9.2) Beispiel „Punktprobe“</u>

Gegeben ist das Dreieck $\langle ABC \rangle$ mit A = (–2; 3; 2), B = (6; 1; 4), C = (1; 3; –1).

Prüfe, ob der Punkt P = (4; 2; 1) zu der von A, B und C gebildeten Ebene gehört.

Lösung:

$P \in ABC$

$\Leftrightarrow$ Es gibt $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, mit $\vec{P} = \vec{A} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow$ Es gibt $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, mit $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ Es gibt $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, mit $\lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wir lösen das zugehörige (überbestimmte!) Gleichungssystem:

[(1)	$8\lambda + 3\mu = 6$]			
(2)	$-2\lambda = -1$	$\Leftrightarrow$	$\lambda = \frac{1}{2}$	(4)
(3)	$2\lambda - 3\mu = -1$			
(2) → (3)	$1 - 3\mu = -1$	$\Leftrightarrow$	$\mu = \frac{2}{3}$	(5)
(4),(5) → (1)	$4 + 2 = 6$	Die Aussage ist wahr.		

Also gehört der Punkt P zu der durch die Punkte A, B und C definierten Ebene.

Wie bei Geraden hebt bei Ebenen der Name „Punktrichtungsgleichung“ hervor, dass die Gleichung nicht symmetrisch in A, B und C ist, sondern neben dem „Stützpunkt“ A nur die „Richtungsvektoren“ $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ zur Charakterisierung der Ebenenpunkte verwendet. Diese beiden Vektoren sind übrigens stets linear unabhängig, weil die drei Punkte A, B und C, die die Ebene definieren, als nicht kollinear vorausgesetzt sind.

<u>(9.3) Bemerkung</u>

Seien A ein Punkt und $\vec{u}$, $\vec{v}$ zwei linear unabhängige Vektoren. Dann ist die Punktmenge

$e := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\,\lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}\}$, kurz geschrieben $e : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$,

eine Ebene im Sinne der Definition (9.1).

Beweis:

Seien die Punkte B und C definiert durch ihre Ortsvektoren: $\vec{B} := \vec{A} + \vec{u}$ bzw. $\vec{C} := \vec{A} + \vec{v}$

Da $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind, können A, B und C nicht kollinear sein. Offenbar ist e = ABC.

Wie bei Geraden kann die Punktrichtungsgleichung einer Ebene dazu verwendet werden, durch die Wahl von Parameterwerten die Koordinaten von Ebenenpunkten zu produzieren. Weiterhin kann, wie wir im Beispiel (9.2) gesehen haben, mit der Gleichung untersucht werden, ob irgendwelche Punkte des Raumes der beschriebenen Ebene angehören. Das folgende Kriterium ist beweistechnisch von großem Nutzen:

<u>(9.4) Lemma („Richtungskriterium für Ebenenpunkte“)</u>

Sei $e : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$ eine Ebene und P ein Punkt von e.

Dann gilt für jeden weiteren Punkt Q des Modellraums:

Q ist genau dann auch ein Punkt der Ebene e, wenn $\overrightarrow{PQ}$ eine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist.

Beweis :

Da $P \in e$, gibt es $\lambda_P , \mu_P \in \mathbb{R}$ mit $\vec{P} = \vec{A} + \lambda_P \,\vec{u} + \mu_P \,\vec{v}$.

„ ⇒ “:

Sei also $Q \in e$.

Dann gibt es $\lambda_Q , \mu_Q \in \mathbb{R}$ mit $\vec{Q} = \vec{A} + \lambda_Q \,\vec{u} + \mu_Q \,\vec{v}$.

Es folgt: $\overrightarrow{PQ} = -\vec{P} + \vec{Q} = -(\vec{A} + \lambda_P \,\vec{u} + \mu_P \,\vec{v}) + \vec{A} + \lambda_Q \,\vec{u} + \mu_Q \,\vec{v} = (\lambda_Q - \lambda_P)\,\vec{u} + (\mu_Q - \mu_P)\,\vec{v}$

„ ⇐ “:

Gebe es also $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$, mit $\overrightarrow{PQ} = \alpha \,\vec{u} + \beta \,\vec{v}$.

Dann gilt $\vec{Q} = \vec{P} + \overrightarrow{PQ} = (\vec{A} + \lambda_P \,\vec{u} + \mu_P \,\vec{v}) + \alpha \,\vec{u} + \beta \,\vec{v} = \vec{A} + (\lambda_P + \alpha)\,\vec{u} + (\mu_P + \beta)\,\vec{v}$

und damit $Q \in e$.

Der vorangehende Satz gibt Anlass zu folgender Begriffsbildung:

(9.5) Definition

Sei $e : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \,\vec{u} + \mu \,\vec{v}$ eine Ebene.

Ein Vektor $\vec{w}$ heißt *Richtungsvektor* von e, wenn es zwei Punkte P, Q auf e gibt, sodass $\vec{w} = \overrightarrow{PQ}$ gilt.

Für die Praxis ist die folgende Beschreibung handlicher:

(9.6) Bemerkung

Sei $e : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \,\vec{u} + \mu \,\vec{v}$ eine Ebene.

Ein Vektor $\vec{w}$ ist genau dann ein Richtungsvektor von e, wenn er eine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist.

Beweis:

„ ⇒ “:

Es gibt also zwei Punkte P, Q auf e mit $\vec{w} = \overrightarrow{PQ}$.

Gemäß Satz (9.4) ist $\vec{w}$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

„ ⇐ “:

Sei $\vec{w}$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Dann ist Punkt B, gegeben durch $\vec{B} = \vec{A} + \vec{w}$, so wie A ein Punkt der Ebene e und $\vec{w} = -\vec{A} + \vec{B} = \overrightarrow{AB}$.

Wie nach der Einführung der Geraden ist auch nach der Einführung von Ebenen zu prüfen, ob die von uns definierten Objekte den Anforderungen der Anschauung standhalten. Fraglich ist nämlich, ob die Punktmengen, die durch eine Punktrichtungsgleichung beschrieben werden, tatsächlich folgende Eigenschaften aufweisen:

(1) Drei nicht kollineare Punkte legen **nur eine** Ebene fest.
(2) Eine Ebene ist „gerade“, das heißt, „nicht gekrümmt“.

Der erste Punkt wird durch das folgende Theorem erledigt; hinsichtlich des zweiten verweisen wir auf den später folgenden Linearitätssatz (9.12).

(9.7) Theorem

Gegeben seien drei nicht kollineare Punkte P, Q und R des Modellraums.

Ist $e : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \,\vec{u} + \mu \,\vec{v}$ eine Ebene, die durch P, Q und R verläuft, so ist e mit der Ebene PQR identisch.

Beweis:

Nachfolgend wird in zwei getrennten Überlegungen gezeigt, dass einerseits jeder Punkt der Ebene PQR zur Ebene e und andererseits jeder Punkt der Ebene e zur Ebene PQR gehören muss. Zusammengenommen ergeben diesen beiden Teilmengenbeziehungen die Identität $e = PQR$.

„ $PQR \subset e$ “:

Sei $X \in PQR$.

Gemäß Definition (9.1) gibt es Skalare $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\overrightarrow{PX} = \rho\,\overrightarrow{PQ} + \sigma\,\overrightarrow{PR}$.

Da die Ebene e durch die Punkte P, Q und R verlaufen soll, müssen die Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ dem Richtungskriterium für Ebenenpunkte (9.4) zufolge Linearkombinationen der Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sein. Es gibt also Skalare $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

(1) $\overrightarrow{PQ} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$

(2) $\overrightarrow{PR} = \gamma\,\vec{u} + \delta\,\vec{v}$

Damit folgt:

$$\overrightarrow{PX} = \rho\,\overrightarrow{PQ} + \sigma\,\overrightarrow{PR} = \rho\left(\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}\right) + \sigma\left(\gamma\,\vec{u} + \delta\,\vec{v}\right) = \left(\rho\alpha + \sigma\gamma\right)\vec{u} + \left(\rho\beta + \sigma\delta\right)\vec{v}$$

Also ist $\overrightarrow{PX}$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ und damit auch ein Richtungsvektor von e.

Weil P auf e liegt, gehört der Punkt X nach Lemma (9.4) ebenfalls zu e.

„ $e \subset PQR$ “:

Sei nun $X \in e$.

Weil auch der Punkt P zur Ebene e gehört, ist $\overrightarrow{PX}$ ein Richtungsvektor von e.

Nach Lemma (9.4) existieren Skalare $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\overrightarrow{PX} = \varphi\,\vec{u} + \psi\,\vec{v}\ .$$

Wir haben im ersten Beweisteil erwähnt, dass die Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ Linearkombinationen der Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind. Weil P, Q und R als nicht kollinear vorausgesetzt sind, müssen die Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ linear unabhängig sein. Aus dieser Eigenschaft darf gefolgert werden, dass mit ihnen auch umgekehrt die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear kombiniert werden können. Aus erzeugten Vektoren werden also erzeugende! Den Nachweis für diesen Sachverhalt gliedern wir wegen seiner generellen Bedeutung aus (siehe Satz (9.8)).

Also ist auch $\overrightarrow{PX}$ eine Linearkombination von $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ und damit ein Richtungsvektor von PQR.

Nach Lemma (9.4) gehört deshalb der Punkt X zur Ebene PQR.

Die Beziehungen $PQR \subset e$ und $e \subset PQR$ können nur dann gleichzeitig richtig sein, wenn $e = PQR$ gilt.

Der folgende Satz sichert die Gültigkeit des soeben geführten Beweises:

<u>(9.8) Satz („Erzeugungsumkehrbarkeit linear unabhängiger Vektoren“)</u>

Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Die beiden Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{s}$ seien Linearkombinationen von $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Wenn die linear kombinierten Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{s}$ linear unabhängig sind, dann können mit ihnen auch umgekehrt die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear kombiniert werden.

Beweis:

Es gibt nach Voraussetzung Skalare $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

(1) $\vec{r} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$

(2) $\vec{s} = \gamma\,\vec{u} + \delta\,\vec{v}$

Da der Vektor $\vec{r}$ wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{r}$ und $\vec{s}$ nicht der Nullvektor sein darf, können in der Gleichung (1) nicht beide Skalare α und β verschwinden. Wir dürfen daher o.B.d.A. annehmen, dass $\alpha \neq 0$ gilt. Damit folgt aus der Gleichung (1):

(3) $$\vec{u} = \frac{1}{\alpha}\,\vec{r} - \frac{\beta}{\alpha}\,\vec{v}$$

und weiter mit (2):

(4) $$\vec{s} = \gamma\left(\frac{1}{\alpha}\,\vec{r} - \frac{\beta}{\alpha}\,\vec{v}\right) + \delta\,\vec{v} = \frac{\gamma}{\alpha}\,\vec{r} + \left(-\frac{\beta\gamma}{\alpha} + \delta\right)\vec{v}$$

In der Gleichung (4) kann der skalare Faktor $\left(-\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\delta\right)$ von $\vec{v}$ nicht gleich null sein, weil andernfalls der Vektor $\vec{s}$ linear abhängig vom Vektor $\vec{r}$ wäre. Folglich kann die Gleichung (4) nach $\vec{v}$ aufgelöst werden. Der Vektor $\vec{v}$ wird dadurch als Linearkombination der Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{s}$ dargestellt.

Mit Hilfe der Gleichung (3) folgt daraus wiederum, dass auch der Vektor $\vec{u}$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{s}$ ist.

Bei dem Satz (9.8) handelt es sich um einen Spezialfall des „Austauschsatzes von Ernst Steinitz". Der Austauschsatz wird im nächsten Paragraphen eine entscheidende Rolle spielen.

Als Theorem (9.7) ergibt sich als direkte Folgerung:

<u>(9.9) Identitätssatz für Ebenen</u>

Stimmen zwei Ebenen in drei nicht kollinearen Punkten überein, so sind sie identisch.

Völlig analog zu (5.9) kann außerdem das folgende „Identitätskriterium" bewiesen werden. Sein Beweis ist eine gute Übung für den Leser (siehe Übung 9.6).

<u>(9.10) Identitätskriterium für Ebenen</u>

Gegeben seien zwei Ebenen $e: \vec{X}=\vec{A}+\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}$ und $f: \vec{X}=\vec{B}+\rho\,\vec{r}+\sigma\,\vec{s}$.

Die beiden Ebenen sind genau dann identisch, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) e und f haben mindestens einen gemeinsamen Punkt, das heißt, $e \cap f \neq \varnothing$.

(2) Die Richtungsvektoren einer der beiden Ebenen sind Linearkombinationen der Richtungsvektoren der anderen Ebene.

Die zweite Bedingung des Identitätskriteriums hat wegen der Erzeugungsumkehrbarkeit linear unabhängiger Vektoren nur scheinbar einen asymmetrischen Charakter!

Wie in §5 halten wir hier fest, dass wir den Stützpunkt und die Richtungsvektoren frei auswechseln dürfen, wenn wir eine Ebene durch eine Parametergleichung beschreiben:

<u>(9.11) Korollar</u>

Gegeben sei eine Ebene e.

Sei B irgendein Punkt von e sowie $\vec{r}$ und $\vec{s}$ irgendwelche linear unabhängige Richtungsvektoren von e.

Dann beschreibt die Parametergleichung $\vec{X}=\vec{B}+\rho\,\vec{r}+\sigma\,\vec{s}$ die Ebene e.

Beweis:

Sei die Ebene e gegeben durch die Gleichung $\vec{X}=\vec{A}+\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}$

Sei f die Ebene, die durch die Gleichung $\vec{X}=\vec{B}+\rho\,\vec{r}+\sigma\,\vec{s}$ beschrieben wird.

Weil B offenbar ein Punkt von f ist und nach Voraussetzung auch ein Punkt von e sein soll, ist die erste Bedingung des Identitätskriteriums (9.10) erfüllt.

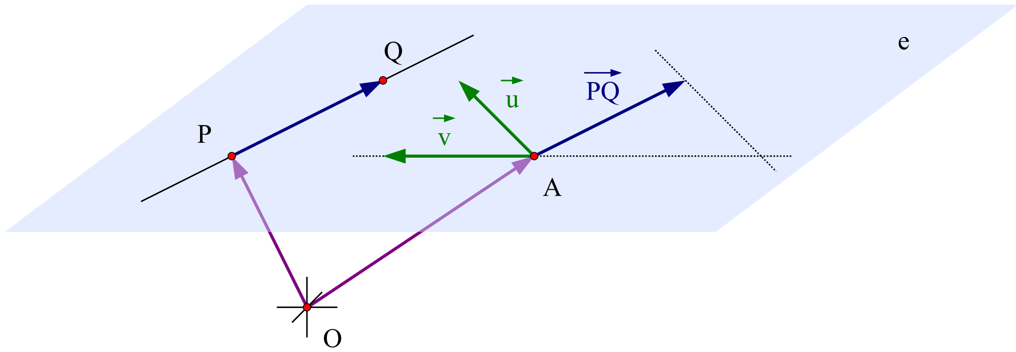
Gemäß Bemerkung (9.6) sind die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{s}$ Linearkombinationen der Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Damit ist auch die zweite Bedingung des Identitätskriteriums (5.9) erfüllt. Also gilt $f = e$.

Der nun folgende Linearitätssatz zeigt, dass Ebenen nicht gekrümmt, sondern „gerade" sind, weil sie mit je zwei verschiedenen Punkten immer auch die gesamte Gerade inkludieren, die durch diese Punkte definiert ist. Der Linearitätssatz legitimiert unsere Vorstellung, dass sich eine Ebene in allen ihren Richtungen unendlich weit ausdehnt.

<u>(9.12) Linearitätssatz für Ebenen</u>

Gegeben sei eine Ebene $e: \vec{X}=\vec{A}+\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}$.

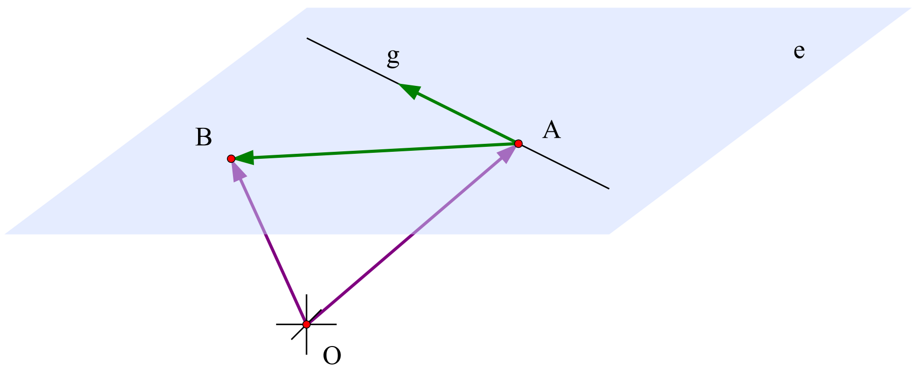
Sind P und Q zwei Punkte von e, so liegt bereits die gesamte Gerade PQ in e, das heißt, es gilt $PQ \subset e$. Folglich ist jeder Richtungsvektor der Geraden g auch ein Richtungsvektor der Ebene e.



Beweis:
$\overrightarrow{PQ}$ ist ein Richtungsvektor von e. Nach Bemerkung (9.6) gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{PQ} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$.
Sei nun R irgendein Punkt der Geraden PQ.
Dann gibt es $\rho \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{PR} = \rho\,\overrightarrow{PQ} = \rho\left(\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}\right) = (\rho\alpha)\,\vec{u} + (\rho\beta)\,\vec{v}$.
Nach Lemma (9.4) ist R ein Punkt von e. Damit ist die Beziehung $PQ \subset e$ nachgewiesen.

Abschließend sichten wir alternatives Datenmaterial, mit dem auf eindeutige Weise eine Ebene definiert werden kann.

<u>(9.13) Satz</u>
Gegeben sei eine Gerade $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ und ein Punkt B, der nicht auf g liegt.
Dann gibt es **genau eine** Ebene e, die g und B enthält.



Beweis:
„Existenz“:
Da der Punkt B nicht auf der Geraden g liegt, sind die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v} := \overrightarrow{AB}$ linear unabhängig.
Sei nun die Ebene e definiert durch die Gleichung $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$.
Mit $\mu = 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ kann für jeden Punkt X der Geraden g dessen Ortsvektor $\vec{X}$ mittels des Terms $\vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$ dargestellt werden.
Setzen wir $\lambda = 0$ und $\mu = 1$, so erhalten wir den Ortsvektor $\vec{B}$. Also erfüllt e die gestellten Bedingungen.

„Eindeutigkeit“:
Da jede weitere Ebene, die die Bedingungen erfüllt, den Stützpunkt A der Geraden g, den Punkt $C \in g$ mit $\vec{C} := \vec{A} + \vec{u}$ und den Punkt B enthalten muss, stimmt sie gemäß dem Identitätssatz für Ebenen mit e überein. Diese drei Punkte sind, wie erforderlich, nicht kollinear, weil $B \notin g$ vorausgesetzt ist.

Auf der Grundlage des soeben bewiesenen Sachverhalts wird im Folgenden geklärt, wann zwei Geraden eine sie „inkludierende“ Ebene eindeutig festlegen.

(9.14) Satz

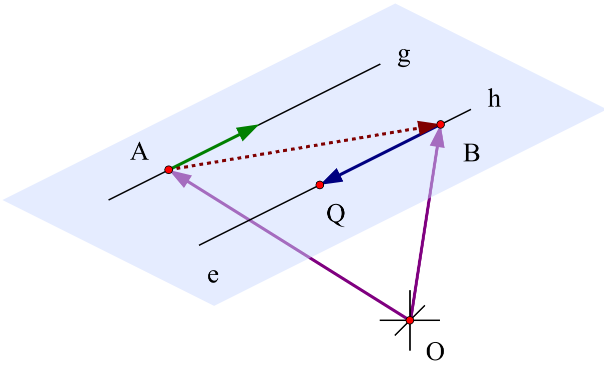
Gegeben seinen zwei Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu\,\vec{v}$. Dann gilt:

- Es gibt genau eine Ebene e, die sowohl g als auch h enthält, wenn g und h parallel sind oder sich in genau einem Punkt schneiden.
- Es gibt keine Ebene, die beide Geraden inkludiert, wenn g und h windschief sind.
- Es gibt unendlich viele Ebenen, die beide Geraden enthalten, wenn g und h identisch sind.

Beweis:

Fall 1 („parallel“)

Weil g und h nach Voraussetzung parallel sind, ist der Stützpunkt B von h kein Punkt von g. Nach Satz (9.13) gibt es genau eine Ebene e, die die Gerade g und den Punkt B enthält. Wir zeigen, dass diese eindeutig bestimmte Ebene die komplette Gerade h enthalten muss.



Sei dazu Q irgendein Punkt von h. Dann ist $\overrightarrow{BQ}$ ein Richtungsvektor von h. Nach Satz (6.7) ist $\overrightarrow{BQ}$ auch ein Richtungsvektor von g.

Da die Gerade g eine Teilmenge der Ebene e ist, ist $\overrightarrow{BQ}$ ein Richtungsvektor von e.

Da B ein Punkt der Ebene e ist, muss auch der Punkt Q nach Bemerkung (9.6) und Lemma (9.4) ein Punkt der Ebene e sein.

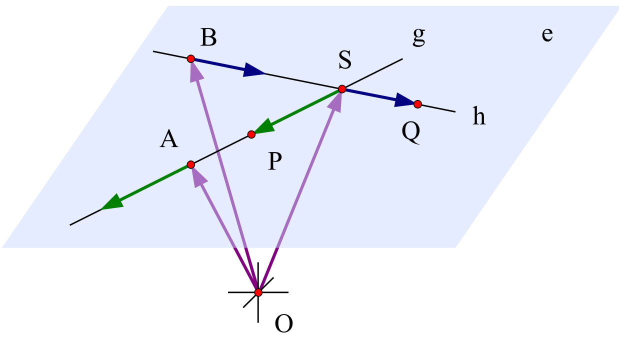
Fall 2 („inzident“):

Nach Voraussetzung schneiden sich die Geraden g und h in genau einem Punkt S. Deshalb müssen ihre Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sein. Durch Auswechseln des Stützpunktes erhalten wir folgende Punktrichtungsgleichungen:

$$g: \vec{X} = \vec{S} + \lambda\,\vec{u} \qquad h: \vec{X} = \vec{S} + \mu\,\vec{v}$$

Seien die Punkte P und Q wie folgt definiert:

$$\vec{P} := \vec{S} + \vec{u} \qquad \vec{Q} := \vec{S} + \vec{v}$$



Dann gilt $\overrightarrow{SP} = \vec{u}$ und $\overrightarrow{SQ} = \vec{v}$.

Also sind die drei Punkte S, P und Q nicht kollinear. Die von ihnen definierte Ebene SPQ enthält offensichtlich beide Geraden g und h.

Es ist auch die einzige Ebene mit dieser Eigenschaft, weil $P \in g$ und $Q \in h$ gilt. Jede Ebene, die die beiden Geraden g und h enthält, muss immer auch die drei nicht kollinearen Punkte S, P und Q enthalten und daher mit der Ebene SPQ übereinstimmen.

Fall 3 („windschief“):

Seien nun die Geraden g und h windschief.

Angenommen, es gäbe eine Ebene e, die beide Geraden enthält.

Weil g und h windschief sind, müssen die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sein. Also wäre

$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$$

eine Punktrichtungsgleichung der Ebene e. Da B ein Punkt von e wäre, gäbe es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{B} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} - \mu\,\vec{v} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$$

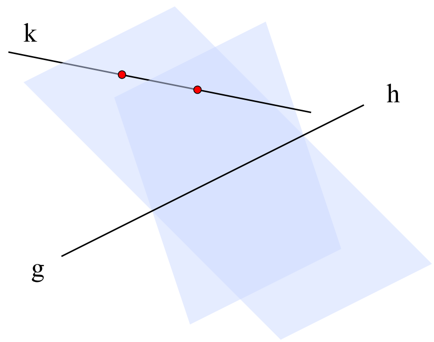
Folglich wäre der Punkt S mit $\vec{S} := \vec{B} - \mu\,\vec{v} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ ein gemeinsamer Punkt von g und h im Widerspruch dazu, dass g und h als windschief vorausgesetzt sind. Es kann also keine Ebene e geben, die diese beiden Geraden enthält!

Fall 4 („identisch“):

Wenn zwei identische Geraden vorliegen, heißt das natürlich, es liegt tatsächlich nur eine Gerade g vor.

Sei k eine Gerade, die windschief zu g ist (Der Leser überlege sich, warum deren Existenz[1] immer gesichert ist). Dann liegt keiner der Punkte von k auf g. Jeder Punkt von k definiert gemäß Satz (9.13) zusammen mit der Geraden g genau eine Ebene, die die Gerade g und den jeweiligen Punkt von k enthält.

Keine zwei dieser so gebildeten Ebenen können identisch sein, denn sonst würden die beiden beteiligten Punkte von k in derselben Ebene und damit die ganze Gerade k in dieser Ebene liegen. Das ist aber nach Fall 3 („windschief“) ausgeschlossen. Also gibt es unendlich viele verschiedene Ebenen, die eine vorgegebene Gerade g enthalten.



Der Satz (9.14) legitimiert nachträglich die Begriffsbildung in Paragraph §7:

(9.15) Bemerkung

Ein Viereck $\langle ABCD \rangle$ ist genau dann „eben“ im Sinne von Definition (7.4), wenn seine vier Eckpunkte in einer (das heißt, derselben!) Ebene des Modellraumes liegen.

Begründung:

„ $\Rightarrow$ “:

Sei das Viereck eben im Sinne der Definition (7.4). Dann sind die Diagonalengeraden AC und BD nicht windschief.

Gemäß Satz (9.14) gibt es im Falle von Parallelität oder Inzidenz genau eine Ebene e, die die beiden Geraden AC und BD und damit alle vier Eckpunkte A, B, C und D enthält.

Im identischen Fall gibt es unendlich viele Ebenen mit dieser Eigenschaft.

„ $\Leftarrow$ “:

Es sei nun vorausgesetzt, dass es einen Ebene e gibt, die die vier Eckpunkte A, B, C und D enthält.

Dann enthält sie gemäß Linearitätssatz (9.12) auch die Diagonalengeraden AC und BD. Gemäß Satz (9.14) können diese Geraden nicht windschief sein. Also ist das Viereck $\langle ABCD \rangle$ eben im Sinne der Definition (7.4).

Wir nehmen diese Bemerkung zum Anlass, einen weiteren klassischen Begriff in den Modellraum zu übertragen.

(9.16) Definition

Raumpunkte heißen *komplanar*, wenn sie in ein und derselben Ebene liegen.

Offensichtlich sind bis zu drei Punkte des Modellraumes stets komplanar. Die Bemerkung (9.15) kann wie folgt umformuliert werden: „Ein Viereck ist genau dann eben im Sinne von Definition (7.4), wenn seine vier Eckpunkte komplanar sind.“

1 Tipp: Betrachte den Koordinatenquader des Stützpunktes der Geraden g.