Übungen zu §9

Übung 9.1

Zeige, dass die Punkte A, B und C nicht kollinear sind, bilde die Punktrichtungsgleichung der Ebene ABC und untersuche, ob die Ebene ABC den Punkt D enthält. [Vergleiche Übung (7.3)!]

(a) A = (2; 1; –1) B = (9; –1; 9) C = (8; –1; 6) D = (4; 1; 2)
(b) A = (11; 2; –6) B = (0; 1; 1) C = (7; 5; –2) D = (8; –5; –7)
(c) A = (–2; 0; –5) B = (–2; –8; 3) C = (4; –2; 3) D = (7; 13; –9)

Übung 9.2

Untersuche, ob die gegebene Gerade zusammen mit dem gegebenen Punkt genau eine Ebene e definieren und gib gegebenenfalls für diese eine Punktrichtungsgleichung an.

(a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ A = (5; 5; –9)

(b) $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ B = (–6; –8; 28)

(c) $k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ C = (13; –2; –10)

Übung 9.3

Stelle die Punktrichtungsgleichung der Ebene auf, falls die beiden Geraden aus Übung (6.4) genau eine sie inkludierende Ebene definieren.

Übung 9.4

Benutze den Linearitätssatz für Ebenen, um zu zeigen, dass die gegebene Gerade g innerhalb der gegebenen Ebene e verlaufen muss.

(a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $e: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

(b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \\ -17 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $e: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Übung 9.5

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sowie die Punkte Q = (1; 0; 5) und R = (14; 1; –8).

(a) Zeige, dass es genau eine Ebene e gibt, die jeden Punkt der Geraden g und den Punkt Q enthält. Gib die Gleichung von e an.
(b) Zeige, dass R ein Punkt der Ebene e ist.
(c) Zeige mit Hilfe des Punktes Q, dass die Ebene $f: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ von der Ebene e verschieden ist, aber dennoch wie die Ebene e sowohl alle Punkte von g als auch den Punkt R enthält.
(d) Gibt es weitere von der Ebene e und von der Ebene f verschiedene Ebenen, die sowohl alle Punkte von g als auch den Punkt R enthalten?

Übung 9.6

Beweise das Identitätskriterium (9.10). Beachte, dass es sich um eine Äquivalenzaussage handelt!