Übung 9.1

(a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ sind linear unabhängig; also sind A, B und C nicht kollinear.

$$ABC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$D \in ABC \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(1) $7\lambda + 6\mu = 2$

(2) $-2\lambda - 2\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\mu$

[(3) $10\lambda + 7\mu = 4$]

(2) → (1): $-7\mu + 6\mu = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -2 \quad (4)$

(4), (2) → (3): $10 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 4$ [falsch]

Der Punkt D liegt nicht in der Ebene ABC.

(b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ sind linear unabhängig; also sind A, B und C nicht kollinear.

$$ABC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$D \in ABC \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit: } \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(1) $-11\lambda - 4\mu = -3$

[(2) $-\lambda + 3\mu = -7$]

(3) $7\lambda + 4\mu = -1$

(1) + (3): $-4\lambda = -4 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = +1 \quad (4)$

(4) → (1): $-11 \cdot (+1) - 4\mu = -3 \quad \Leftrightarrow \quad -4\mu = 8 \Leftrightarrow \mu = -2 \quad (5)$

(4)(5) → (2): $-1 + 3 \cdot (-2) = -7$ [wahr]

Der Punkt D liegt in der Ebene ABC.

(c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind linear unabhängig.

A, B und C sind nicht kollinear.

$$ABC: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$D \in ABC \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(1) $\quad 6\mu = 9 \quad \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{2}$

(2) $\quad -8\lambda - 2\mu = 13$

[(3) $\quad 8\lambda + 8\mu = -4$]

(1) → (2): $-8\lambda - 3 = 13 \Leftrightarrow -8\lambda = 16 \Leftrightarrow \lambda = -2 \quad (4)$

(1), (4) → (3): $8 \cdot (-2) + 8 \cdot \frac{3}{2} = -4 \Leftrightarrow -16 + 12 = -4$ [wahr]

Der Punkt D liegt auf der Ebene ABC.

Übung 9.2

(a) $A \in g \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ [nicht lösbar] $\quad$ Es folgt $A \notin g$.

A und g definieren die Ebene $e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$

(b) $B \in h \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mu = -3$ $\quad$ Es folgt $B \in h$. B und h legen nicht genau eine Ebene fest!

(c) $C \in k \Leftrightarrow \exists \nu \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ [nicht lösbar] $\quad$ Es folgt $C \notin k$.

C und k definieren die Ebene $f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix}$

Übung 9.3 (vgl. Lösungen zu Übung 6.4)

(a) g und h sind parallel. $e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5-7 \\ -1-(-1) \\ 8-6 \end{pmatrix}$

(b) g und h schneiden sich in genau einem Punkt S. $e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) g und h sind windschief. Es gibt keine Ebene, die g und h enthält.

(d) g und h sind identisch. Es gibt nicht nur eine Ebene, die g und h enthält.

(e) g und h schneiden sich in genau einem Punkt S. $e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Übung 9.4

(a) Die Punkte $A := (-1; 4; -2)$ und $B := (-1-11; 4-2; -2+3)$ liegen auf g.

$A \in e \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

[(1) $3\lambda + \mu = 4$]

(2) $-2\lambda + 4\mu = 2$

(3) $\lambda - 3\mu = -2 \Leftrightarrow 2\lambda - 6\mu = -4$

(2)+(3): $-2\mu = -2 \Leftrightarrow \mu = 1$ (4)

(4)→(3): $\lambda - 3 \cdot 1 = -2 \Leftrightarrow \lambda = 1$ (5)

(4),(5)→(1): $3 \cdot 1 + 1 = 4$ [wahr] $A \in e$!

$B \in e \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

[(1) $3\lambda + \mu = -7$]

(2) $-2\lambda + 4\mu = 0$

(3) $\lambda - 3\mu = 1 \Leftrightarrow 2\lambda - 6\mu = 2$

(2)+(3): $-2\mu = 2 \Leftrightarrow \mu = -1$ (4)

(4)→(3): $\lambda - 3 \cdot (-1) = 1 \Leftrightarrow \lambda = -2$ (5)

(4),(5)→(1): $3 \cdot (-2) + (-1) = -7 \Leftrightarrow -7 = -7$ [wahr] $B \in g$!

Da A und B auf e liegen, muss für $g = AB$ $g \subset e$ gelten.

(b) Die Punkte $A := (-7; 12; -17)$ und $B := (-4; 11; -12)$ liegen auf g.

$$A \in e \iff \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(1) \quad -\lambda + 2\mu = -7$

$(2) \quad 3\lambda + 2\mu = 5$

$[(3) \quad -4\lambda + \mu = -14]$

$(2)-(1): \quad 4\lambda = 12 \iff \lambda = 3 \quad (4)$

$(4) \to (1): \quad -3 + 2\mu = -7 \iff 2\mu = -4 \iff \mu = -2 \quad (5)$

$(4),(5) \to (3): \quad -4 \cdot 3 - 2 = -14 \quad$ [wahr] $\quad A \in e$!

$$B \in e \iff \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(1) \quad -\lambda + 2\mu = -4$

$(2) \quad 3\lambda + 2\mu = +4$

$[(3) \quad -4\lambda + \mu = -9]$

$(2)-(1): \quad 4\lambda = 8 \iff \lambda = 2 \quad (4)$

$(4) \to (1): \quad -2 + 2\mu = -4 \iff 2\mu = -2 \iff \mu = -1 \quad (5)$

$(4),(5) \to (3): \quad -4 \cdot 2 + (-1) = -9 \quad$ [wahr] $\quad B \in e$

Da $A, B \in e$, muss für $g = AB$ $\quad g \subset e$ gelten!

<u>Übung 9.5</u>

(a) $Q \in g \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ [nicht lösbar] $\quad Q \notin g$.

$$e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(b) $R \in e \iff \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$(1)\quad -5\lambda + (-3)\mu = 10$

$(2)\quad -2\lambda + 3\mu = 4$

$[(3)\quad 4\lambda + 5\mu = -8]$

$(1)+(2):\ -7\lambda = 14 \Leftrightarrow \lambda = -2 \quad (4)$

$(4)\to(1):\ -5\cdot(-2) - 3\mu = 10 \Leftrightarrow -3\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 0 \quad (5)$

$(4),(5)\to(3):\ 4(-2) + 5\cdot 0 = -8$ [wahr] $\quad R \in e!$

(c) Setzen wir in der Punktrichtungsgleichung von f $\mu = 0$, so erhalten wir die Gleichung von g. Also gilt $g \subset f$. Mit $\lambda = -2$ und $\mu = 0$ liefert die Punktrichtungsgleichung von f den Ortsvektor von R. Also gilt auch $R \in f$.

$Q \in f \Leftrightarrow \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$(1)\quad -5\lambda + 2\mu = -3$

$(2)\quad -2\lambda - 2\mu = 3$

$[(3)\quad 4\lambda + \mu = 5]$

$(1)+(2):\ -7\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad (4)$

$(4)\to(1):\ 2\mu = -3 \Leftrightarrow \mu = -\frac{3}{2} \quad (5)$

$(4),(5)\to(3):\ 4\cdot 0 - \frac{3}{2} = 5$ [falsch] $\quad Q \notin f$.

(d) Da $R \in g$ gilt, enthält jede Ebene, die die Gerade g enthält, auch den Punkt R.
Ist also $\vec{v}$ ein Vektor, der sowohl linear unabhängig vom Richtungsvektor von g, als auch jeweils linear unabhängig von den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ ist, dann ist

$d:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix} + \mu\,\vec{v}$ eine Ebene, die von e und f verschieden ist, aber trotzdem die Gerade g und den Punkt R enthält.

Übung 9.6

„$\Rightarrow$":

Voraussetzungen: (1) e und f haben einen gemeinsamen Punkt P.

(2) Es gibt Skalare $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{r} + \beta \vec{s} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \gamma \cdot \vec{r} + \delta \cdot \vec{s}$$

Seien nun Q und R definiert durch $\vec{Q} := \vec{P} + \vec{u}$, $\vec{R} := \vec{P} + \vec{v}$.

Dann sind Q und R gemäß Lemma (9.4) Punkte von e.

Weil $\vec{PQ} = \vec{u}$ und $\vec{PR} = \vec{v}$ linear unabhängig sind, müssen P, Q und R nicht kollinear sein.

Nach Theorem (9.7) gilt daher $e = PQR$.

Als gemeinsamer Punkt ist P natürlich auch ein Punkt von f.

Außerdem gilt $\vec{PQ} = \vec{u} = \alpha \vec{r} + \beta \vec{s}$, $\vec{PR} = \vec{v} = \gamma \vec{r} + \delta \vec{s}$.

Nach Lemma (9.4) sind dann auch die Punkte Q und R Punkte von f. Also gilt auch $f = PQR$ und damit $e = f$.

„$\Leftarrow$":

Voraussetzung: $e = f$

Die Bedingung (1) ist dann trivialer Weise erfüllt, weil die Ebenen e und f nur aus gemeinsamen Punkten bestehen.

Auch die Bedingung (2) ist trivialer Weise erfüllt:

Jeder Richtungsvektor von f ist ein Richtungsvektor von e.

Anmerkung: Der Zweck des Identitätskriteriums besteht darin, zwei „schwache" Bedingungen zu formulieren, mit denen eine „starke" Aussage über zwei Ebenen, nämlich „Identität", gemacht werden kann.