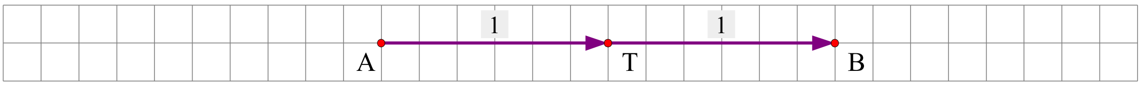
§8 Teilverhältnisse

Bei der Einführung des Mittelpunktes einer Strecke wurde im vorangegangenen Paragraphen bereits angedeutet, dass das Konzept der Teilung einer Strecke $\overline{AB}$ verallgemeinert werden soll. Wir erinnern uns daran, welche vektoriellen Bedingungen einen Punkt T zum Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ machen:

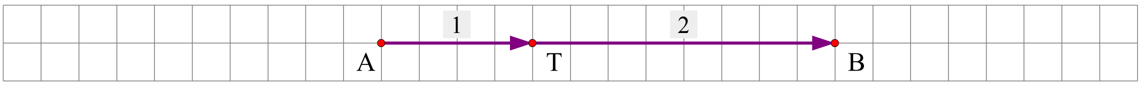


$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{TB}$ (gemäß Definition (7.10)) $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (gemäß Satz (7.11))

- In der Definition (7.10) werden die beiden „Teilvektoren“ $\overrightarrow{AT}$ und $\overrightarrow{TB}$ zueinander in Beziehung gesetzt.
- Im Satz (7.11) wird der erste „Teilvektor“ $\overrightarrow{AT}$ auf den „Gesamtvektor“ $\overrightarrow{AB}$ bezogen.

Weil T die Strecke $\overline{AB}$ in zwei gleiche Teile teilt, sprechen wir vom Teilverhältnis 1:1. Das Verhältnis „1:1“ ist aber nichts anderes als ein Quotient zweier Zahlen, der den Wert „1“ besitzt. Es ist daher mathematisch korrekt zu sagen, dass der Mittelpunkt eine Strecke im Verhältnis „1“ teilt, auch wenn das umgangssprachlich verwegen klingt.

Wir rücken nun in unserer Veranschaulichung den Teilpunkt T aus seiner Mittelposition so weit näher an den Punkt A heran, dass die Strecke $\overline{TB}$ doppelt so lang wie die Strecke $\overline{AT}$ wird. Dann teilt T die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis „1:2“ oder, wenn wir den Wert des Verhältnisses betonen wollen, im Verhältnis „ $\frac{1}{2}$ “:

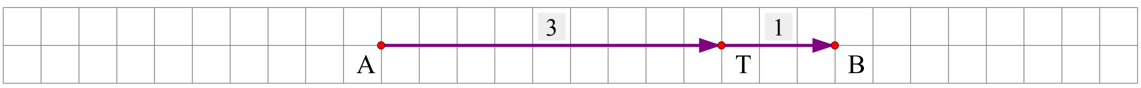


$\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{TB}$ $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Wir sehen hier, dass die Beziehung zwischen den beiden „Teilvektoren“ $\overrightarrow{AT}$ und $\overrightarrow{TB}$ das anschaulich gewonnene Teilverhältnis widerspiegelt.

In der Beziehung zwischen dem „Teilvektor“ $\overrightarrow{AT}$ und dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ ist das nicht der Fall. Deswegen ist diese Beziehung aber nicht etwa uninteressant, denn in ihr wird der Parameterwert $\lambda = \frac{1}{3}$ ausgewiesen, mit dem der Teilpunkt T aus der Punktrichtungsgleichung $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\overrightarrow{AB}$ der Geraden AB gewonnen werden kann. Weiter unten wird gezeigt werden, wie das Teilverhältnis und dieser Parameterwert wechselseitig voneinander arithmetisch abhängen.

Rücken wir den Teilpunkt T aus der Mitte näher an den Endpunkt B heran, sodass in der Veranschaulichung die Strecke $\overline{AT}$ beispielsweise dreimal so lang wie die Strecke $\overline{TB}$ wird, dann erhalten wir ein Teilverhältnis von „3:1“, das einen Zahlenwert von „3“ besitzt:



$\overrightarrow{AT} = 3\,\overrightarrow{TB}$ $\overrightarrow{AT} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

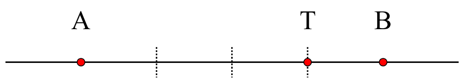
Wieder gibt die Beziehung zwischen den beiden „Teilvektoren“ $\overrightarrow{AT}$ und $\overrightarrow{TB}$ das anschaulich gewonnene Teilverhältnis wieder, während die Beziehung zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AT}$ und $\overrightarrow{AB}$ den Parameterwert liefert, mit der aus der kanonischen Punktrichtungsgleichung der Geraden AB der Teilpunkt gewonnen werden kann.

In Verallgemeinerung unserer anschaulichen Vorüberlegungen definieren wir Teilverhältnisse im Modellraum:

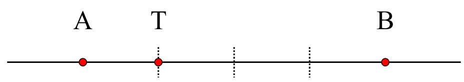
(8.1) Definition
Gegeben seien eine Strecke $\overline{AB}$, ein vom Punkt B verschiedener Punkt T, sowie eine reelle Zahl $\tau \neq -1$.
Wir sagen „T teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis τ “, wenn $\overrightarrow{AT} = \tau\,\overrightarrow{TB}$ gilt.

In der Sprechweise dieser Definition wird die Strecke $\overline{AB}$ durch ihren Mittelpunkt im Verhältnis $\tau = 1$ geteilt. Teilverhältnisse werden jedoch, wie schon eingangs verwendet, gewöhnlich als Quotient geschrieben. So schreibt man beispielsweise $\tau = 2{:}1$ anstelle von $\tau = 2$, also auch $\tau = 1{:}1$ anstelle von $\tau = 1$, oder $\tau = 2{:}3$ anstelle von $\tau = \frac{2}{3}$.

Die Angabe eines Teilverhältnisses versieht eine Strecke mit einem Durchlaufsinn in Reihenfolge der Nennung der Eckpunkte. Es ist also zu unterscheiden, ob T die Strecke $\overline{AB}$ oder die Strecke $\overline{BA}$ im Verhältnis $\tau = 3{:}1$ teilt!



T teilt $\overline{AB}$ im Verhältnis 3:1



T teilt $\overline{BA}$ im Verhältnis 3:1

Das in der Definition ausgeschlossene Teilverhältnis $\tau = -1$ existiert nicht, weil sonst im Widerspruch zur Voraussetzung $A \neq B$ der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ein Vielfaches des Nullvektors wäre:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} = -\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TB} = \vec{0}$$

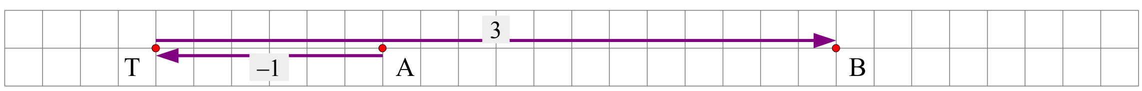
In diesem Zusammenhang drängt sich sofort die Frage auf, ob es überhaupt negative Teilverhältnisse gibt. Wir werden uns gleich diesem Aspekt der Definition widmen.

Vorher halten wir noch fest, dass die Angabe eines Teilverhältnisses τ gemäß Definition (8.1) immer automatisch beinhaltet, dass der Teilpunkt T auf der durch die Strecke $\overline{AB}$ definierten Geraden AB liegt. Deswegen darf eine entsprechende Bedingung in der Definition (8.1) fehlen. Folgender Schluss ist wegen $\tau \neq -1$ richtig:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} = \tau\,\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TB} = (1+\tau)\,\overrightarrow{TB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{TB} = \frac{1}{1+\tau}\,\overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BT} = -\frac{1}{1+\tau}\,\overrightarrow{AB}$$

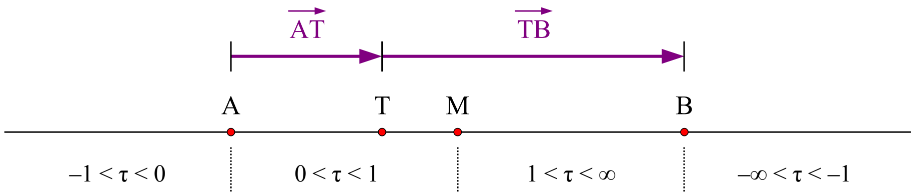
Also ist der Vektor $\overrightarrow{BT}$ vom Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$ der Geraden AB linear abhängig. Nach dem Richtungskriterium (5.4) muss T ein Punkt der Geraden AB sein.

Zu negativen Teilverhältnissen kommt es, wenn der Teilpunkt T auf der Geraden AB außerhalb der Strecke $\overline{AB}$ liegt. Man spricht in diesen Fällen von einem „äußeren Teilpunkt“ der Strecke. Wir veranschaulichen diesen Sachverhalt an einem Beispiel:



$$\overrightarrow{AT} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{TB} \qquad\qquad \overrightarrow{AT} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$$

Die folgende Übersicht fasst alle wesentlichen Größeninformationen zusammen:



Es wurde schon erwähnt, dass das von einem Teilpunkt T einer Strecke $\overline{AB}$ erzeugte Teilverhältnis τ in einer arithmetischen Beziehung zu dem Wert des Gleichungsparameters der Geraden AB steht, mit dem der Teilpunkt gewonnen werden kann. Der folgende Satz erläutert, wie umzurechnen ist.

<u>(8.2) Satz</u>

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$, ein von B verschiedener Punkt $T \in AB$ und reelle Zahlen $\tau, \lambda \in \mathbb{R}$, wobei $\tau \neq -1$ und $\lambda \neq 1$ gelte.

Dann sind die folgenden beiden Schlüsse korrekt:

(1) $\overrightarrow{AT} = \lambda\,\overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad$ T teilt $\overline{AB}$ im Verhältnis $\dfrac{\lambda}{1-\lambda} = \lambda : (1-\lambda)$

(2) T teilt $\overline{AB}$ im Verhältnis $\tau \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AT} = \dfrac{\tau}{1+\tau}\,\overrightarrow{AB}$

Beweis:

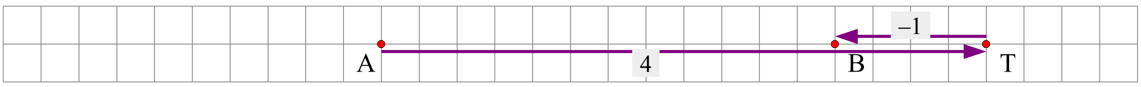
(1): $\overrightarrow{AT} = \lambda\,\overrightarrow{AB} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AT} = \lambda\,(\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB}) \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AT} = \lambda\,\overrightarrow{AT} + \lambda\,\overrightarrow{TB} \;\Rightarrow\; (1-\lambda)\,\overrightarrow{AT} = \lambda\,\overrightarrow{TB}$

$\Rightarrow\; \overrightarrow{AT} = \dfrac{\lambda}{(1-\lambda)}\,\overrightarrow{TB}$ (Beachte: Wegen $T \neq B$ ist $\lambda \neq 1$ vorausgesetzt.)

(2): $\overrightarrow{AT} = \tau\,\overrightarrow{TB} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} = \tau\,\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TB} = (1+\tau)\,\overrightarrow{TB} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{TB} = \dfrac{1}{1+\tau}\,\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow\; \overrightarrow{AT} = \dfrac{\tau}{1+\tau}\,\overrightarrow{AB}$ (Beachte: $\tau \neq -1$)

Wir erläutern die Umrechnung an einem anschaulichen Beispiel:



- Aus $\overrightarrow{AT} = \frac{4}{3}\,\overrightarrow{AB}$ erhalten wir das Teilverhältnis $\frac{4}{3} : (1 - \frac{4}{3}) = \frac{4}{3} : (-\frac{1}{3}) = -4 : 1 = -4$.
- Aus $\overrightarrow{AT} = -4\,\overrightarrow{TB}$ erhalten wir den Parameterwert $\dfrac{-4}{1+(-4)} = \dfrac{-4}{-3} = \dfrac{4}{3}$.

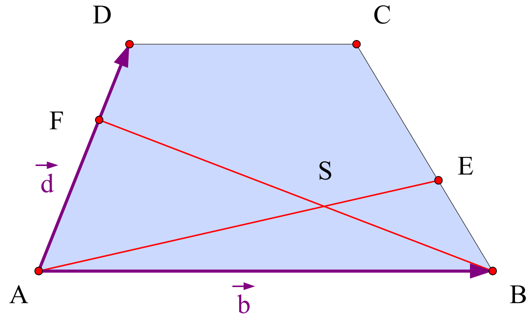
Im vorangegangenen Paragraphen §7 ist das Teilverhältnis der Diagonalen im Parallelogramm nicht rechnerisch ermittelt worden. Das Teilverhältnis 1:1 wurde nicht entdeckt, sondern nur seine Richtigkeit überprüft.

Im folgenden Beispiel wird gezeigt, wie Teilverhältnisse aus gegebenen Voraussetzungen errechnet werden können, ohne dass eine konkrete Vermutung über deren Größe vorliegt.

(8.3) Beispiel

Gegeben sei ein Trapez $\langle ABCD \rangle$ mit den Parallelen AB und CD, in dem $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ gilt.

Der Punkt E teile die Seite $\overline{BC}$ im Verhältnis 2:3, der Punkt F teile die Seite $\overline{AD}$ im Verhältnis 2:1.
In welchen Verhältnissen teilen sich die Transversalen $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$?



Lösung:
Da D auf einer Parallelen der Geraden AB liegt, kann D kein Punkt von AB sein. Nach dem Richtungskriterium für Geradenpunkte (Lemma (5.4)) sind die Vektoren $\vec{b} := \overrightarrow{AB}$ und $\vec{d} := \overrightarrow{AD}$ linear unabhängig. Diese scheinbar nebensächliche Bemerkung ist, wie wir sehen werden, von entscheidender Bedeutung!
Wir erfassen die Transversalen vektoriell:

$$AE : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\overrightarrow{AE} \text{ mit } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{b} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{2}{5}(-\vec{b} + \vec{d} + \frac{1}{2}\vec{b}) = \frac{4}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{d}$$

$$BF : \vec{X} = \vec{B} + \mu\,\overrightarrow{BF} \text{ mit } \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\vec{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = -\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}$$

Nun suchen wir Werte für die Parameter λ und μ, die zu einem gemeinsamen Punkt von AE und BF gehören:

$$\vec{A} + \lambda(\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{d}) = \vec{B} + \mu(-\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}) \;\Leftrightarrow\; \lambda(\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{d}) - \mu(-\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}) = \vec{B} - \vec{A}$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{4}{5}\lambda\,\vec{b} + \frac{2}{5}\lambda\,\vec{d} + \mu\,\vec{b} - \frac{2}{3}\mu\,\vec{d} = \vec{b} \qquad \Leftrightarrow\; (\frac{4}{5}\lambda + \mu - 1)\vec{b} + (\frac{2}{5}\lambda - \frac{2}{3}\mu)\vec{d} = \vec{0}$$

Aufgrund des Nullvektorkriteriums für linear unabhängige Vektoren ist die letzte Gleichung nur erfüllt, falls die skalaren Koeffizienten verschwinden. Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

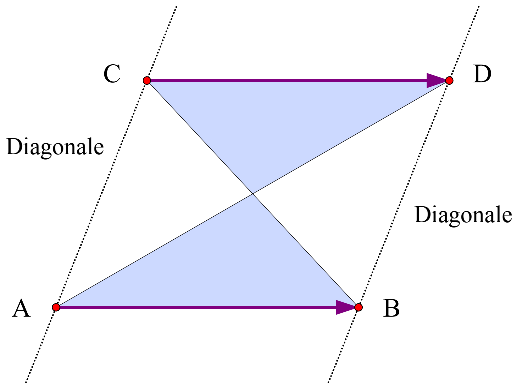
$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{4}{5}\lambda + \mu - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; 4\lambda + 5\mu = 5 & \\
(2) & \frac{2}{5}\lambda - \frac{2}{3}\mu = 0 \;\Leftrightarrow\; 4\lambda - \frac{20}{3}\mu = 0 & \\
(1)-(2) & \frac{35}{3}\mu = 5 \;\Leftrightarrow\; \mu = \frac{3}{7} & (3) \\
(3) \to (2) & \frac{2}{5}\lambda - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{5}\lambda = \frac{2}{7} \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{5}{7} &
\end{array}$$

Durch Einsetzen der Werte in die Geradengleichungen kann sofort nachgeprüft werden, dass die Transversalen einen gemeinsamen Punkt S haben. S teilt $\overline{AE}$ im Verhältnis 5:2 und $\overline{BF}$ im Verhältnis 3:4.

Zum Schluss dieses Paragraphen zeigen wir noch, dass nicht nur die Parallelogramme, sondern auch die Trapeze mit einer **Teilungseigenschaft** ihrer Diagonalen charakterisiert werden können.

Bei diesen Überlegungen schließen wir aus naheliegenden Gründen zwei uninteressante Fälle aus. Zum einen lassen wir nicht zu, dass die vier Eckpunkte des jeweils betrachteten Vierecks kollinear sind. Wenn die vier Eckpunkte auf einer Geraden liegen, können keine zwei Seiten parallel sein. Es kann dann auch kein Trapez vorliegen!

Zum anderen verlangen wir, dass für die betrachteten Vierecke ABCD stets $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{CB}$ gilt. Andernfalls würde beispielsweise aus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ sofort (mit Hilfe von Bemerkung (2.4)) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ folgen.



Das hieße aber, dass die Diagonalengeraden AC und BD parallel verlaufen. Sie hätten also keinen gemeinsamen Punkt. Die Diagonalen des Vierecks würden sich nicht gegenseitig teilen. [Anmerkung: Gemäß Übung 7.15 (c) handelt es sich um ein überschlagenes Parallelogramm.]

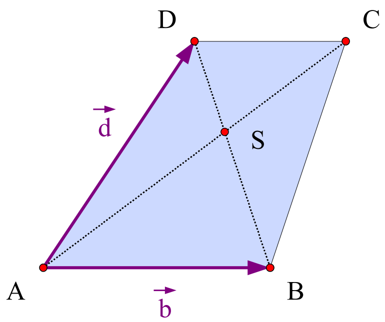
Der Fall $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ führt ebenso auf parallele Diagonalengeraden.

Es folgt das angekündigte Diagonalenkriterium für Trapeze:

(8.4) Satz („Diagonalenkriterium für Trapeze")

Sei $\langle ABCD \rangle$ ein Viereck aus vier nicht kollinearen Punkten, in dem weder $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, noch $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ gilt.

Ein solches Viereck ist genau dann ein Trapez, wenn sich seine Diagonalen im gleichen Verhältnis gegenseitig teilen.



Beweis:

„ $\Rightarrow$ "

Sei $\langle ABCD \rangle$ ein Trapez, in dem o.B.d.A. die Seitengeraden AB und CD parallel verlaufen.

Setzen wir $\vec{b} := \overrightarrow{AB}$, dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{DC} = \alpha\,\vec{b}$.

Dabei muss $\alpha \neq -1$ gelten, weil der Fall $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ gemäß Voraussetzung ausgeschlossen ist.

Wir setzen außerdem abkürzend $\vec{d} := \overrightarrow{AD}$ und beschreiben die Diagonalengeraden vektoriell:

$$AC : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) \;\Leftrightarrow\; \vec{X} = \vec{A} + \lambda\left(\vec{d} + \alpha\,\vec{b}\right) \;\Leftrightarrow\; \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\alpha\,\vec{b} + \lambda\,\vec{d}$$
$$BD : \vec{X} = \vec{B} + \mu\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) \;\Leftrightarrow\; \vec{X} = \vec{B} + \mu\left(-\vec{b} + \vec{d}\right) \;\Leftrightarrow\; \vec{X} = \vec{B} - \mu\,\vec{b} + \mu\,\vec{d}$$

Wir untersuchen AC und BD auf gemeinsame Punkte:

$$\vec{A}+\lambda\,\alpha\,\vec{b}+\lambda\,\vec{d}=\vec{B}-\mu\,\vec{b}+\mu\,\vec{d} \;\Leftrightarrow\; \lambda\alpha\,\vec{b}+\lambda\,\vec{d}=-\vec{A}+\vec{B}-\mu\,\vec{b}+\mu\,\vec{d}$$
$$\Leftrightarrow\; \lambda\alpha\,\vec{b}+\lambda\,\vec{d}-\vec{b}+\mu\,\vec{b}-\mu\,\vec{d}=\vec{0} \;\Leftrightarrow\; (\lambda\alpha-1+\mu)\,\vec{b}+(\lambda-\mu)\,\vec{d}=\vec{0}$$

Aufgrund der Parallelität der Geraden AB und CD sind die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{d}$ linear unabhängig. Die letzte Gleichung ist aufgrund des Nullvektorkriteriums nur erfüllt, wenn die skalaren Koeffizienten verschwinden. Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

(1) $\lambda\alpha - 1 + \mu = 0$

(2) $\lambda - \mu = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = \mu$

(2) → (1) $\lambda\alpha - 1 + \lambda = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = \dfrac{1}{\alpha+1}$ [Beachte: $\alpha \neq -1$]

Wir prüfen mit den errechneten Parameterwerten, ob wir tatsächlich einen gemeinsamen Punkt erhalten haben. In die Punktrichtungsgleichung von AC eingesetzt, erhalten wir einen Punkt P mit

$$\vec{P}=\vec{A}+\frac{\alpha}{\alpha+1}\,\vec{b}+\frac{1}{\alpha+1}\,\vec{d}$$

In die Punktrichtungsgleichung von BD eingesetzt, erhalten wir einen Punkt Q mit

$$\vec{Q}=\vec{B}-\frac{1}{\alpha+1}\,\vec{b}+\frac{1}{\alpha+1}\,\vec{d}=\vec{A}+\vec{b}-\frac{1}{\alpha+1}\,\vec{b}+\frac{1}{\alpha+1}\,\vec{d}=\vec{A}+\frac{\alpha+1}{\alpha+1}\,\vec{b}-\frac{1}{\alpha+1}\,\vec{b}+\frac{1}{\alpha+1}\,\vec{d}$$

Die Punkte P und Q stimmen überein; sie sind der gemeinsame Schnittpunkt S der Diagonalen AC und BD.

Der Punkt S teilt gemäß Satz (8.2) die Diagonalen im Verhältnis $\dfrac{\lambda}{1-\lambda}=\dfrac{\frac{1}{\alpha+1}}{1-\frac{1}{\alpha+1}}=\dfrac{\frac{1}{\alpha+1}}{\frac{\alpha}{\alpha+1}}=\dfrac{1}{\alpha}=1:\alpha$.

„ $\Leftarrow$ “

Wir betrachten jetzt ein Viereck $\langle ABCD\rangle$, in dem sich die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ gegenseitig im gleichen Verhältnis teilen. Das ist natürlich nur dann möglich, wenn sich die Diagonalengeraden AC und BD in einem Punkt S schneiden.

Da der Schnittpunkt S die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ im gleichen Verhältnis teilt, gibt es eine Zahl $\tau \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\overrightarrow{AS}=\tau\,\overrightarrow{SC}$ und $\overrightarrow{BS}=\tau\,\overrightarrow{SD}$.

Das Teilverhältnis τ kann nicht den Wert 0 haben, weil andernfalls aus $\overrightarrow{AS}=\vec{0}=\overrightarrow{BS}$ folgen würde, dass der Schnittpunkt S der Diagonalen sowohl mit dem Punkt A als auch mit dem Punkt B übereinstimmte. Wenn wir von einem Viereck sprechen, ist aber grundsätzlich vorausgesetzt, dass die Eckpunkte paarweise verschieden sind (siehe auch Definition (7.1)).

Mit $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{BS}$ folgt:

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SC}=-\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}=\frac{1}{\tau}\,\overrightarrow{AS}-\frac{1}{\tau}\,\overrightarrow{BS}=\frac{1}{\tau}\left(\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{BS}\right)=\frac{1}{\tau}\,\overrightarrow{AB}$$

Also ist der Richtungsvektor $\overrightarrow{DC}$ der Seitengeraden CD linear abhängig vom Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$ der Seitengeraden AB. Folglich sind die Geraden AB und CD parallel. Das Viereck $\langle ABCD\rangle$ ist ein Trapez.