Übungen zu §8

Übung 8.1

Gegeben sind die Punkte A = (–4; –5; 11) und B = (4; 3; –5).
Berechne das Verhältnis, in dem der Punkt T die Strecke $\overline{AB}$ teilt.

(a) T = (–3; –4; 9)	(b) T = (2; 1; –1)	(c) T = (0; –1; 3)
(d) T = (–7; –8; 17)	(e) T = (6; 5; –9)	(f) T = (–1; –2; 3)

Übung 8.2

Gegeben sind die Punkte A = (–5; 0; 6) und B = (2; 14; –8).
Berechne die Koordinaten des Punktes T der die Strecke $\overline{AB}$ in dem angegebenen Verhältnis τ teilt.

(a) τ = 2:5	(b) τ = 6:1	(c) τ = 4:3
(d) τ = –1:2	(e) τ = –8:1	(f) τ = –5:4

Übung 8.3

Der Punkt T teile die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis τ. Berechne den fehlenden Endpunkt der Strecke.

(a)	A = (2; –1; 5)	T = (6; 3; 7)	τ = 2:3
(b)	A = (3; 0; –4)	T = (7; –2; 2)	τ = –1:5
(c)	A = (0; 0; 5)	T = (–6; 3; 2)	τ = –5:3
(d)	B = (2; 4; 5)	T = (–1; –1; 8)	τ = 1:1
(e)	B = (–6; 0; 1)	T = (4; 2; –7)	τ = –1:2
(f)	B = (7; 5; 4)	T = (–2; 2; –2)	τ = –5:3

Übung 8.4

Zeige, dass es sich bei dem Viereck $\langle ABCD \rangle$ um ein Trapez handelt.
Berechne den Schnittpunkt S der Diagonalen und gib die Verhältnisse an, in denen S die Diagonalen teilt.

(a)	A = (–5; 0; –1)	B = (1; 3; 5)	C = (3; –4; 11)	D = (1; –5; 9)
(b)	A = (–3; 2; 0)	B = (2; 7; 5)	C = (1; 2; –2)	D = (4; 5; 1)

Übung 8.5

Im Trapez $\langle ABCD \rangle$ teilen sich die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ im Punkt M im Verhältnis τ.
Berechne die fehlenden Eckpunkte C und D.

(a)	A = (0; –6; –4)	B = (6; –4; 0)	M = (4; –8; 2)	τ = 2:3
(b)	A = (1; 3; 6)	B = (8; 2; 2)	M = (3; 0; 2)	τ = –1:3

Übung 8.6

Ermittle für ein n-Eck unter Verwendung kombinatorischer Methoden die Anzahl d(n) der Diagonalen und die Anzahl p(n) der verschiedenen Diagonalenpaare, für die die Verhältnisse berechnet werden könnten, in denen sie sich teilen.
Berechne exemplarisch d(n) und p(n) für n = 5 und n= 10, das heißt, für ein Penta- und ein Dekagon.

Übung 8.7

Die Verbindungsstrecken zwischen den Mittelpunkten der Seiten eines Dreiecks und den jeweils gegenüber liegenden Eckpunkten heißen Seitenhalbierende des Dreiecks.
Gegeben sind die Punkte A = (2; 0; –1), B = (4; 8; 3), C = (0; 4; –5).

(a) Bestimme die Mittelpunkte D von $\overline{AB}$, E von $\overline{BC}$, F von $\overline{CA}$ und die Gleichungen der Seitenhalbierenden des Dreiecks $\langle ABC \rangle$.

(b) Zeige, dass sich die Seitenhalbierenden in genau einem Punkt S schneiden.
[Tipp: Berechne den Schnittpunkt von CD und AE und zeige, dass dieser auch auf BF liegt.]

(c) Gib die Verhältnisse an, in dem S die Seitenhalbierenden $\overline{CD}$, $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ teilt.

Übung 8.8

Beweise, dass sich in jedem Dreieck $\langle ABC \rangle$ aus drei nicht kollinearen Punkten A, B und C die Seitenhalbierenden in genau einem Punkt S, genannt *Schwerpunkt des Dreiecks*, im Verhältnis 2:1 schneiden.

Berechne die Koordinaten des Schwerpunkts S in Abhängigkeit von den Koordinaten der Eckpunkte A, B und C.

[Wichtiges Ergebnis für §13: $\vec{S} = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{B} + \frac{1}{3}\vec{C}$]

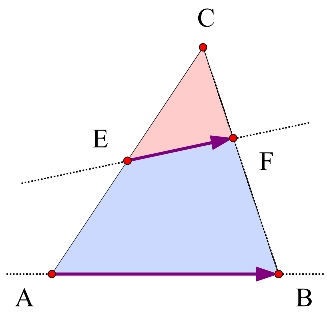
Übung 8.9

Gegeben sei ein Dreieck $\langle ABC \rangle$ aus drei nicht kollinearen Punkten A, B, C.

Auf den Seitengeraden CA und CB mögen die Punkte E bzw. liegen, die weder mit A, B oder C übereinstimmen.

Beweise:

- Die Gerade EF ist genau dann parallel zu AB, wenn E und F die Seiten $\overline{CA}$ bzw. $\overline{CB}$ im gleichen Verhältnis τ teilen.



Tipps:

„ ⇒ “:

- Zeige zunächst: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{EF} = \lambda\,\overrightarrow{AC} + \lambda\,\overrightarrow{CB}$
- Zeige andererseits, dass $\overrightarrow{EF} = \frac{\tau}{1+\tau}\overrightarrow{AC} + \frac{\sigma}{1+\sigma}\overrightarrow{CB}$ gilt, wenn E die Seite $\overline{CA}$ im Verhältnis τ und F die Seite $\overline{CB}$ im Verhältnis σ teilt.
- Zeige, dass aus den beiden alternativen Darstellungen von $\overrightarrow{EF}$ schließlich $\tau = \sigma$ folgt.

„ ⇐ “:

- Orientiere dich an dem 2. Teil des Beweises von Satz (8.4).

Übung 8.10

Gegeben sind die Punkte $A = (2; -10; 3)$, $B = (11; -7; 6)$, $C = (15; -1; 2)$, $D = (1; -1; -8)$.

Im Viereck $\langle ABCD \rangle$ teile der Punkt E die Seite $\overline{AB}$ im Verhältnis 1:2 und der Punkt F die Seite $\overline{CD}$ im Verhältnis 1:1.

Zeige, dass sich die Transversalen DE und AF schneiden, bestimme den Schnittpunkt S und die Verhältnisse, in denen S die Strecken $\overline{DE}$ und $\overline{AF}$ teilt.

Übung 8.11

Gegeben sind die Punkte $A = (6; -4; 0)$, $B = (10; 0; -4)$, $C = (4; 24; -13)$ und $D = (7; 5; -5)$.

Der Punkt E teile die Seite $\overline{AB}$ im Verhältnis 3:1 und der Punkt F teile die Seite $\overline{BC}$ im Verhältnis 2:1.

Zeige dass sich die Transversalen DE und AF schneiden, bestimme den Schnittpunkt S und die Verhältnisse, in denen S die Strecken $\overline{DE}$ und $\overline{AF}$ teilt.