Übung 8.1

(a) $\overrightarrow{AT} = \tau \overrightarrow{TB} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix} \iff \tau = \frac{1}{7}$

(b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \iff \tau = 3$ (c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \iff \tau = 1$

(d) $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ -22 \end{pmatrix} \iff \tau = -\frac{3}{11}$ (e) $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \iff \tau = -5$

(f) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$ [nicht lösbar] T liegt nicht auf AB!

Übung 8.2

(a) $\tau = \frac{2}{5}$ $\vec{T} = \vec{A} + \overrightarrow{AT} = \vec{A} + \frac{\tau}{1+\tau} \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{T} = \vec{A} + \frac{6}{7} \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{T} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ (d) $\vec{T} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 8 \end{pmatrix}$

(e) $\vec{T} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{8}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ -10 \end{pmatrix}$ (f) $\vec{T} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \\ -76 \end{pmatrix}$

Übung 8.3

(a) $\vec{B} = \vec{A} + \overrightarrow{AB} = \vec{A} + \frac{\tau+1}{\tau} \overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\left(= \vec{T} + \frac{1}{\tau} \overrightarrow{AT} \right)$

(b) $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ -28 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12/5 \\ 6/5 \\ 19/5 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{A} = \vec{T} - \overrightarrow{AT} = \vec{T} - \tau \overrightarrow{TB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix}$

(e) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ (f) $\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$

Übung 8.4

(a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}$; $\vec{DC} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ Da $\vec{AB} = 2\cdot\vec{DC}$ gilt, sind die Seitengeraden AB und DC parallel oder identisch. Punktprobe:

$D \in AB \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix}1\\-5\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}$ [nicht lösbar]

Es gilt also $AB \parallel DC$.

Schnittpunktansatz $AC \cap BD$:

$$\begin{pmatrix}-5\\0\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}8\\-4\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\-8\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \mu\begin{pmatrix}8\\-4\\12\end{pmatrix} - \nu\begin{pmatrix}0\\-8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}$$

(1) $8\mu = 6 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{4}$

(2) $-4\mu + 8\nu = 3$

[(3) $12\mu - 4\nu = 6$]

(1)→(2): $-4\cdot\frac{3}{4} + 8\nu = 3 \Leftrightarrow 8\nu = 6 \Leftrightarrow \nu = \frac{3}{4}$ (4)

(1),(4)→(3): $12\cdot\frac{3}{4} - 4\cdot\frac{3}{4} = 6 \Leftrightarrow 9 - 3 = 6$ [wahr]

$\vec{S} = \begin{pmatrix}-5\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix}8\\-4\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\8\end{pmatrix}$ S teilt $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ im Verhältnis 3:1.

(b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$; $\vec{DC} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}$; Punktprobe $D \in AB$: $\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$

Offenbar gilt: $AB \parallel DC$.

Schnittpunktansatz (verkürzt):

(1) $4\mu - 2\nu = 5$

(2) $2\nu = 5 \Leftrightarrow \nu = \frac{5}{2}$

[(3) $-2\mu + 4\nu = 5$]

(2)→(1): $4\mu - 5 = 5 \Leftrightarrow \mu = \frac{5}{2}$ (4)

(2),(4)→(3): $-2\cdot\frac{5}{2} + 4\cdot\frac{5}{2} = 5$ [wahr]

$\vec{S} = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\2\\-5\end{pmatrix}$ S teilt $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ im Verhältnis $-\frac{5}{3}$.

Übung 8.5

(a) $\vec{C} = \vec{A} + \vec{AC} = \vec{A} + \frac{\tau+1}{\tau} \cdot \vec{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}$

$\vec{D} = \vec{M} + \frac{1}{\tau}\vec{BM} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{C} = \vec{M} + \frac{1}{\tau}\vec{AM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$

$\vec{D} = \vec{B} + \frac{\tau+1}{\tau}\vec{BM} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Übung 8.6

Bei der Verbindung von Eckpunkten eines Polygons handelt es sich um die Bildung von Paaren aus einer Menge von n Elementen „ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtung der Reihenfolge". Nach den Regeln der Kombinatorik gibt es $\binom{n}{2}$ solche Paare.

Da ein n-Eck n Seiten besitzt, bleiben $\binom{n}{2} - n$ Diagonalen: $d(n) = \frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1) - 2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$

Sollen nun je zwei Diagonalen auf die wechselseitigen Teilverhältnisse untersucht werden, handelt es sich wiederum um die Bildung von Paaren, dieses Mal aus einer Menge von $\frac{n(n-3)}{2}$ Elementen „ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge:

$$p(n) = \binom{\frac{n(n-3)}{2}}{2} = \frac{\frac{n(n-3)}{2} \cdot \left(\frac{n(n-3)}{2} - 1\right)}{2} = \frac{n(n-3)\left(n(n-3)-2\right)}{8}$$

$d(5) = 5 \quad ; \quad p(5) = 10$

$d(10) = 35 \quad ; \quad p(10) = 595$

Übung 8.7

(a) $D=(3;4;1)$; $E=(2;6;-1)$; $F=(1;2;-3)$

Gleichungen der Seitenhalbierenden:

$CD: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\-5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}$; $AE: \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$; $BF: \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\8\\3\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}-3\\-6\\-6\end{pmatrix}$

(b) Schnittpunktansatz $CD \cap AE$ (verkürzt):

$$(1)\quad 3\lambda = 2 \iff \lambda = \frac{2}{3}$$

$$(2)\quad -6\mu = -4 \iff \mu = \frac{2}{3}$$

$$(3)\quad 6\lambda = 4 \iff \lambda = \frac{2}{3}$$

CD und AE schneiden sich im Punkt S mit

$$\vec{S} = \begin{pmatrix}0\\4\\-5\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$$

$S \in BF \iff \exists\, \nu \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8\\3\end{pmatrix} = \nu\begin{pmatrix}-3\\-6\\-6\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-2\\-4\\-4\end{pmatrix} = \nu\begin{pmatrix}-3\\-6\\-6\end{pmatrix} \iff \nu = \frac{2}{3}$$

S liegt auch auf der Seitenhalbierenden BF.

(c) S teilt jede der drei Seitenhalbierenden im Verhältnis $\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2:1$

Übung 8.8

Wir setzen $\vec{c} := \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} := \overrightarrow{AC}$.

Dann ist $\vec{a} := \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{c} + \vec{b}$.

Seien D, E, F die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$.

Dann gilt $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$,

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{c} + \frac{1}{2}(-\vec{c} + \vec{b})$, $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$

Wir untersuchen die Seitenhalbierenden

CD: $\vec{x} = \vec{C} + \lambda\left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$ und AE: $\vec{x} = \vec{A} + \mu\left(\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$

auf gemeinsame Punkte:

$$\vec{C} + \lambda\left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \vec{A} + \mu\left(\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\lambda\vec{b} + \frac{1}{2}\lambda\vec{c} - \frac{1}{2}\mu\vec{c} - \frac{1}{2}\mu\vec{b} + \vec{b} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(-\lambda - \frac{1}{2}\mu + 1\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu\right)\vec{c} = \vec{0}$$

Da A, B und C nicht kollinear sind, müssen $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sein. Aus dem Nullvektorkriterium folgt, dass die letzte Vektorgleichung genau dann erfüllt ist, wenn die Koeffizienten verschwinden:

$$(1) \quad -\lambda - \frac{1}{2}\mu = -1$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \mu \quad (3)$$

$$(3) \rightarrow (1): \quad -\frac{3}{2}\lambda = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

CD und AE haben genau einen gemeinsamen Punkt S, der $\overline{CD}$ und $\overline{AE}$ im Verhältnis $\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2:1$ teilt.

$$\vec{S} = \vec{C} + \frac{2}{3}\left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \vec{C} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

$$= \vec{C} - \frac{2}{3}\left(-\vec{A} + \vec{C}\right) + \frac{1}{3}\left(-\vec{A} + \vec{B}\right) = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{B} + \frac{1}{3}\vec{C}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right)$$

Wir müssen noch zeigen, dass $S \in BF$ gilt:

$$S \in BF \Leftrightarrow \vec{C} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \vec{B} + \nu\left(-\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \nu\vec{c} - \frac{1}{2}\nu\vec{b} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\vec{c} + \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \nu\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c} = \nu\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \nu = \frac{2}{3}$$

S teilt auch $\overline{BF}$ i. V. 2:1.

Übung 8.9

„⇒": Es sei vorausgesetzt, dass $EF \parallel AB$ gilt.

Dann müssen die Richtungsvektoren $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{AB}$ linear abhängig sein. Also gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ mit:

$$\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{AB} = \lambda\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \lambda\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{CB}$$

Teile E die Strecke $\overline{CA}$ im Verhältnis τ; dann gilt $\overrightarrow{CE} = \frac{\tau}{1+\tau}\overrightarrow{CA}$.

Teile F die Strecke $\overline{CB}$ im Verhältnis σ; dann folgt $\overrightarrow{CF} = \frac{\sigma}{1+\sigma}\overrightarrow{CB}$.

Daraus ergibt sich:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} = \frac{\tau}{1+\tau}\overrightarrow{AC} + \frac{\sigma}{1+\sigma}\overrightarrow{CB}.$$

Aus den beiden Darstellungen von $\overrightarrow{EF}$ folgt:

$$\lambda\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{CB} = \frac{\tau}{1+\tau}\overrightarrow{AC} + \frac{\sigma}{1+\sigma}\overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{\tau}{1+\tau}\right)\overrightarrow{AC} + \left(\lambda - \frac{\sigma}{1+\sigma}\right)\overrightarrow{CB} = \vec{o}$$

Da A, B und C als nicht kollinear vorausgesetzt sind, müssen $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{CB}$ linear unabhängig sein.

Mit dem Nullvektorkriterium folgt:

$$\lambda = \frac{\tau}{1+\tau} \wedge \lambda = \frac{\sigma}{1+\sigma} \Rightarrow \tau(1+\sigma) = \sigma(1+\tau)$$
$$\Rightarrow \tau = \sigma$$

„⇐": Da E die Strecke $\overline{CA}$ im gleichen Verhältnis teilt wie F die Strecke $\overline{CB}$, gibt es ein $\tau \in \mathbb{R}$ mit

$\overrightarrow{CE} = \tau\overrightarrow{EA}$ und $\overrightarrow{CF} = \tau\overrightarrow{FB}$.

Es muss $\tau \neq 0$ gelten, weil andernfalls $E = F = C$ gelten würde.

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF} = -\frac{\tau}{1+\tau}\overrightarrow{CA} + \frac{\tau}{1+\tau}\overrightarrow{CB}$$
$$= \frac{\tau}{1+\tau}\left(-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\tau}{1+\tau}\overrightarrow{AB}$$

Die Richtungsvektoren der Geraden EF und AB sind linear abhängig. Da $EF \neq AB$ vorausgesetzt ist, folgt $EF \parallel AB$.

Übung 8.10

$\vec{E} = \vec{A} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \begin{pmatrix}2\\-10\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}9\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-9\\4\end{pmatrix}$ DE: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-8\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\-8\\12\end{pmatrix}$

$\vec{F} = \vec{C} + \frac{1}{2}\vec{CD} = \begin{pmatrix}15\\-1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-14\\0\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-1\\-3\end{pmatrix}$ AF: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-10\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}6\\9\\-6\end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren von DE und AF sind linear unabhängig.

Schnittpunktansatz (verkürzt):

(1) $4\lambda - 6\mu = 1 \iff 8\lambda - 12\mu = 2$

(2) $-8\lambda - 9\mu = -9$

[(3) $12\lambda + 6\mu = 11$]

(1)+(2): $-21\mu = -7 \iff \mu = \frac{1}{3}$ (4)

(4) → (1): $4\lambda - 6\cdot\frac{1}{3} = 1 \iff 4\lambda = 3 \iff \lambda = \frac{3}{4}$ (5)

(4), (5) → (3): $12\cdot\frac{3}{4} + 6\cdot\frac{1}{3} = 11 \iff 9 + 2 = 11$ [wahr]

DE und AF schneiden sich im Punkt S mit $\vec{S} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-8\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix}4\\-8\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-7\\1\end{pmatrix}$

S teilt $\overline{DE}$ bzw. $\overline{AF}$ im Verhältnis 3:1 bzw. 1:2.

Übung 8.11

$\vec{E} = \vec{A} + \frac{3}{4}\vec{AB} = \begin{pmatrix}6\\-4\\0\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix}4\\4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-1\\-3\end{pmatrix}$ DE: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\5\\-5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-6\\2\end{pmatrix}$

$\vec{F} = \vec{B} + \frac{2}{3}\vec{BC} = \begin{pmatrix}10\\0\\-4\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-6\\24\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\16\\-10\end{pmatrix}$ AF: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\-4\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\20\\-10\end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren von DE und AF sind linear unabhängig.

(1) $2\lambda = -1 \iff \lambda = -\frac{1}{2}$

(2) $-6\lambda - 20\mu = -9$

[(3) $2\lambda + 10\mu = 5$]

(1) → (2): $3 - 20\mu = -9 \iff \mu = \frac{3}{5}$ (4)

(1), (4) → (3): $2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 10\cdot\frac{3}{5} = 5 \iff -1 + 6 = 5$ [wahr]

DE und AF schneiden sich im Punkt S mit $\vec{S} = \begin{pmatrix}7\\5\\-5\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\\-6\end{pmatrix}$

S teilt $\overline{DE}$ bzw. $\overline{AF}$ im Verhältnis −1:3 bzw. 3:2.