§7 Polygone

Nachdem die Begriffe „Gerade“ und „Strecke“ im Modellraum $\mathbb{R}^3$ etabliert sind, können wir uns dem Studium der Figuren widmen, die aus Strecken zusammengesetzt sind.

(7.1) Definition

Unter einem *Polygon* verstehen wir eine zyklische[1] Folge $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ von paarweise verschiedenen Punkten des Modellraumes. Ein solches Polygon wird mit $\langle A_1 A_2 \dots A_n \rangle$ bezeichnet.

Die Punkte A_i, wobei $1 \leq i \leq n$, heißen *Eckpunkte* des Polygons.

Zwei Eckpunkte, die in dem Zyklus der Eckpunkte direkt aufeinanderfolgen, heißen *benachbart*.

Strecken, die zwei benachbarte Eckpunkte verbinden, heißen *Seiten* des Polygons. *Benachbarte Seiten* sind Seiten, die von einem gemeinsamen Eckpunkt ausgehen.

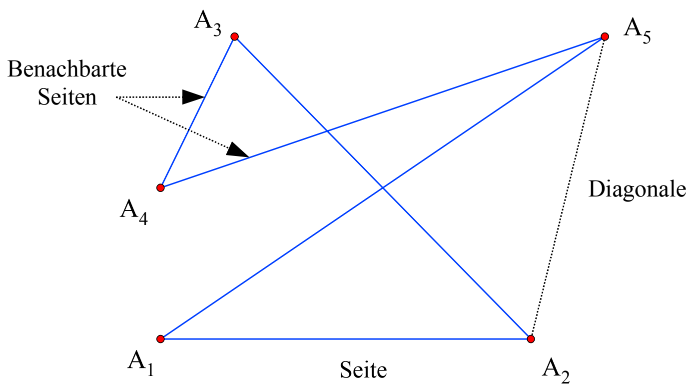
Strecken, die zwei nicht benachbarte Eckpunkte verbinden, heißen *Diagonalen* des Polygons.

Geraden, die durch zwei benachbarte Eckpunkte verlaufen, heißen *Seitengeraden*.

Geraden, die durch zwei nicht benachbarte Eckpunkte verlaufen, heißen *Diagonalengeraden*.

Vektoren, die durch zwei benachbarte Eckpunkte definiert werden, heißen *Seitenvektoren*.

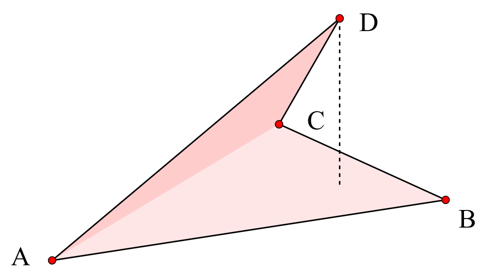
Vektoren, die durch zwei nicht benachbarte Eckpunkte definiert werden, heißen *Diagonalenvektoren*.



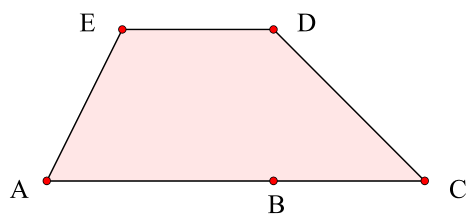
Es wird hier bewusst nicht erklärt, was unter der *Fläche* eines Polygons zu verstehen ist, weil diese Begriffsbildung alles andere als trivial ist. Paragraph §13 wird sich mit diesem Problem auseinandersetzen.

Ist für ein Polygon eine konkrete Eckenzahl $n = 3, 4, 5, \dots$ gegeben, so werden wir wie gewohnt von einem „Dreieck“, „Viereck“, „Fünfeck“ usw. reden.

Die Definition des Polygon-Begriffs ist allgemein gehalten; sie lässt eine Reihe von Merkwürdigkeiten zu, die wir hier sogleich bewusst machen wollen.

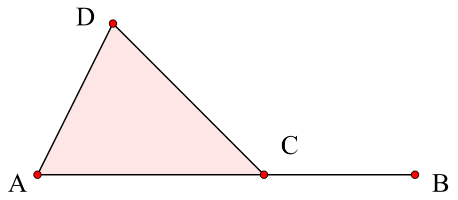


Ein Polygon muss keine ebene Figur sein.
Ebene Polygone werden auch *planar* genannt.

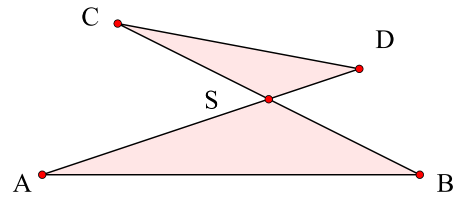


Zwei Seiten können auf derselben
Seitengeraden liegen.

1 Eine endliche Folge von Elementen heißt zyklisch, wenn auf das letztgenannte Element wieder das erstgenannte folgt. Eine Perlenkette veranschaulicht eine zyklische Struktur in sinnfälliger Weise.



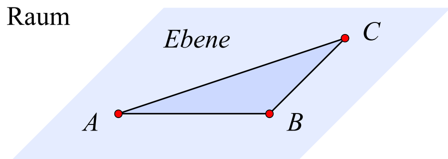
Benachbarte Seiten können unendlich viele gemeinsame Punkte besitzen.



Zwei nicht benachbarte Seiten können sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

Nach dieser Vorbemerkung wenden wir uns zunächst den Dreiecken und anschließend den Vierecken zu.

Dreiecke werden durch eine zyklische Folge von drei Punkten definiert. Nach unserer Vorstellung sind Dreiecke stets „eben", das heißt, es gibt im Euklidischen Raum immer eine Euklidische Ebene, die ihre drei Eckpunkte enthält.

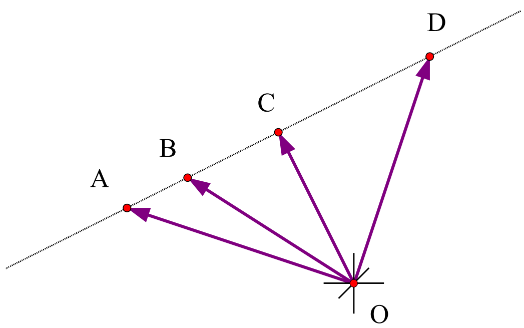


Tatsächlich ist das noch eine recht schwache Beschreibung des Sachverhalts; denn Dreiecke sind gleichsam der Inbegriff von Planarität. Das wird durch die folgende Formulierung besser deutlich, die in der Euklidischen Geometrie axiomatischen Charakter hat: „Durch drei nicht „kollineare" Punkte verläuft genau eine Ebene."

Diesen Grundsatz werden wir im übernächsten Paragraphen zum Ausgangspunkt für die Einführung von Ebenen im Modellraum machen. Bereits hier übertragen wir den Begriff „kollinear" in den Modellraum:

<u>(7.2) Definition</u>

Raumpunkte heißen *kollinear*, wenn sie auf ein und derselben Geraden liegen.



Offenbar sind bis zu zwei Raumpunkte immer kollinear. Für drei Raumpunkte gilt folgender Sachverhalt.

<u>(7.3) Bemerkung</u>

Drei Punkte A, B, C sind genau dann kollinear, wenn die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ (oder $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$) linear abhängig sind.

Beweis:

A, B, C kollinear $\Leftrightarrow$ $C \in AB$ $\Leftrightarrow$ $(\exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit})\ \vec{C} = \vec{A} + \lambda\, \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow$ $(\exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit})\ -\vec{A} + \vec{C} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ $(\exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit})\ \overrightarrow{AC} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$ [1. Fall!]

[für den 2. Fall:] $\Leftrightarrow$ $(\exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit})\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ $(\exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit})\ \overrightarrow{BC} = (\lambda - 1)\, \overrightarrow{AB}$

Die Bemerkung (7.3) besagt auch, dass drei Punkte genau dann nicht kollinear sind, wenn die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ (oder $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$) linear unabhängig sind.

Es sei angemerkt, dass die Kollinearität dreier Punkte auch den Fall einschließt, dass zwei der drei Punkte übereinstimmen. Umgekehrt folgt aus der Nichtkollinearität dreier Punkte, dass diese paarweise verschieden sein müssen.

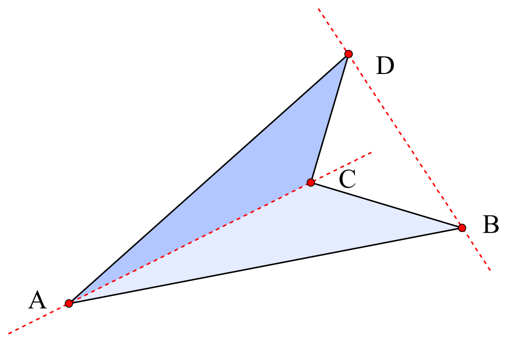
Dreiecke haben in der Geometrie große Bedeutung, weil sie die Grundelemente der Figurenlehre darstellen. Es ist immer vorteilhaft, wenn ein Polygon „trianguliert“, das heißt, aus Dreiecke zusammengesetzt werden kann.

Vierecke hingegen sind deswegen von besonderem Interesse, weil sie trotz ihrer Überschaubarkeit einen großen Formenreichtum bieten. Für Vierecke im Modellraum führen wir zunächst eine grobe Unterscheidung ein.

(7.4) Definition

Ein Viereck $\langle ABCD \rangle$ heiße *windschief*, wenn seine Diagonalengeraden AC und BD windschief zueinander sind.

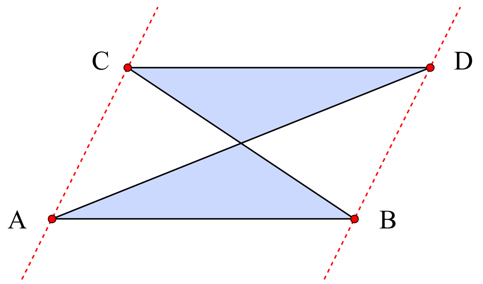
Nicht windschiefe Vierecke werden *eben* genannt.



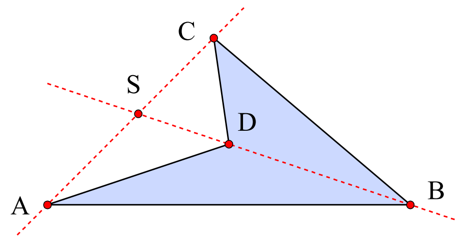
Viereck mit windschiefen Diagonalengeraden AC und BD

(7.5) Bemerkung

Ein Viereck $\langle ABCD \rangle$ ist genau dann eben, wenn die Diagonalengeraden AC und BD parallel oder identisch sind oder sich in einem Punkt schneiden.



Viereck mit parallelen Diagonalengeraden



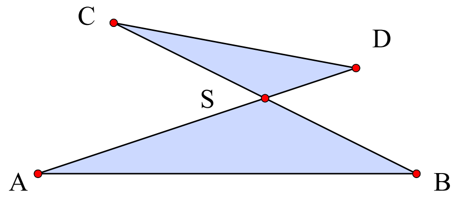
Viereck mit sich schneidenden Diagonalengeraden

Der Fall identischer Diagonalengeraden wird in der Bemerkung (7.5) nur der Vollständigkeit halber erwähnt. In einem solchen „entarteten“ Viereck sind alle vier Seitengeraden und die beiden Diagonalengeraden identisch.

Der übernächste Paragraph wird nach der Einführung des Ebenenbegriffs auf die Unterscheidung von windschiefen und ebenen Vierecken zurückkommen. Hier ist zunächst nur festzustellen, dass der in Bemerkung (7.5) erwähnte Fall paralleler Diagonalengeraden uns darauf aufmerksam macht, dass selbst ebene Vierecke nicht notwendig die uns vertraute Form besitzen müssen.

(7.6) Definition

Ein Viereck $\langle ABCD \rangle$ heißt *überschlagen*, wenn zwei „gegenüber liegende“ Seiten einen gemeinsamen Punkt besitzen.



Zur Begriffsbildung ist anzumerken, dass es sich eingebürgert hat, bei Vierecken zwei nicht benachbarte Seiten „gegenüber liegend“ zu nennen. Bei Polygonen mit größerer Eckenzahl ist diese Sprechweise nicht sinnvoll.

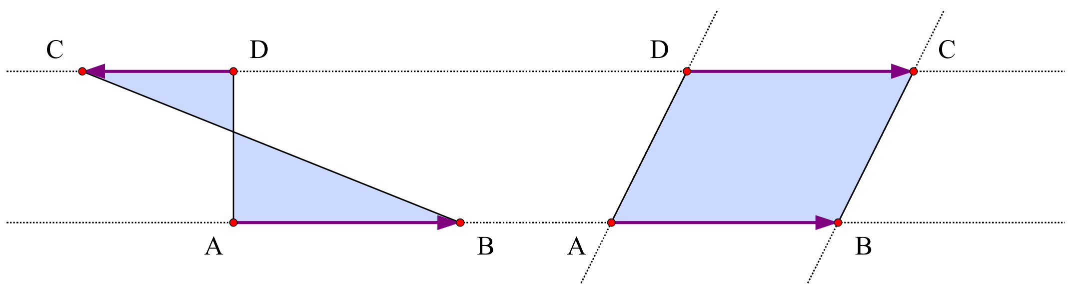
In der Menge der ebenen Vierecke entfaltet sich die klassische Typologie der Vierecke der Euklidischen Geometrie. Wir können ihr jedoch an dieser Stelle noch nicht folgen, weil die meisten wohlbekannten Typen, wie Rechteck, Quadrat, Drachen etc. erst dann im Modellraum eingeführt werden können, wenn Längen- und Winkelmessung erklärt sind. Lediglich zwei Sonderformen können mit den bislang vorhanden Mitteln im Modellraum definiert werden.

(7.7) Definition

Ein Viereck $\langle ABCD \rangle$ im Modellraum heißt

Trapez, wenn $AB \parallel CD$ **oder** $AD \parallel BC$,

Parallelogramm, wenn $AB \parallel CD$ **und** $AD \parallel BC$ gilt.



Es folgt unmittelbar aus der Definition, dass jedes Parallelogramm auch ein Trapez ist. In einer Übung zu diesem Paragraphen wird unsere Anschauung bestätigt, dass zwar Trapeze, nicht aber Parallelogramme überschlagen sein können.

(7.8) Satz

Jedes Trapez (und damit auch jedes Parallelogramm) ist eben.

Beweis:

Wir betrachten ein Trapez $\langle ABCD \rangle$ mit den parallelen Seitengeraden AB und CD.

Angenommen, die Diagonalengeraden $g := AC$ und $h := BD$ wären windschief.

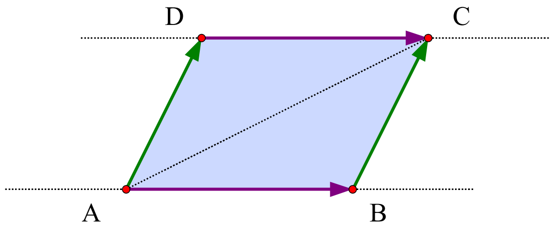
Dann hätten die beiden windschiefen Geraden g und h zwei parallele Transversalen, nämlich AB und CD. Im vorangehenden Paragraphen haben wir aber gezeigt, dass das nicht möglich ist (siehe Satz (6.13)).

Also kann das Viereck $\langle ABCD \rangle$ nicht windschief sein.

Auf früher gestellte Übungsaufgaben (siehe §2) Bezug nehmend, leiten wir eine vektorielle Beschreibung des Parallelogramms her. Mit diesem Kriterium rekonstruieren wir jetzt im Modellraum das Erkennungsmerkmal für Parallelogramme, das im Anhang des Paragraphen §2 eine wichtige Rolle spielte (siehe (A2.4)).

(7.9) Satz („Vektorielles Seitenkriterium für Parallelogramme“)

Ein Viereck $\langle ABCD \rangle$ ist genau dann ein Parallelogramm, wenn die Punkte A, B, C und D nicht kollinear sind und die Seitenvektoren zweier gegenüber liegender Seiten übereinstimmen, also z.B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ gilt.



Beweis :

„ ⇒ “:

Wir setzen voraus, dass in dem Viereck $\langle ABCD \rangle$ die gegenüber liegenden Seiten parallel zueinander sind.

Dann können die Eckpunkte nicht kollinear sein, weil die Punkte C und D wegen der Parallelität der Seitengeraden AB und CD nicht auf der Geraden AB liegen dürfen.

Gemäß Definition (6.5) sind die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ sowie die Vektoren $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BC}$ jeweils linear abhängig sind. Es gibt daher Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{DC} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC} = \mu\,\overrightarrow{AD}$.

Andererseits folgt aus der Parallelität von AB und CD, dass der Punkt D nicht auf der Geraden AB liegen kann. Gemäß dem Richtungskriterium für Geradenpunkte müssen die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ linear unabhängig sein.

Nun gilt aber sowohl $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AD}$ als auch $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \lambda\,\overrightarrow{AB}$.

Daraus ergibt sich $\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \lambda\,\overrightarrow{AB} \;\Leftrightarrow\; (1-\lambda)\,\overrightarrow{AB} + (\mu - 1)\,\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ folgt mit dem Nullvektorkriterium (6.4): $\lambda = \mu = 1$

„ ⇐ “:

Gelte nun $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Dann gilt auch $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ gemäß Bemerkung (2.4). Dem Analyse-Raster (6.9) zufolge sind die gegenüber liegenden Seitengeraden von $\langle ABCD \rangle$ parallel oder identisch.

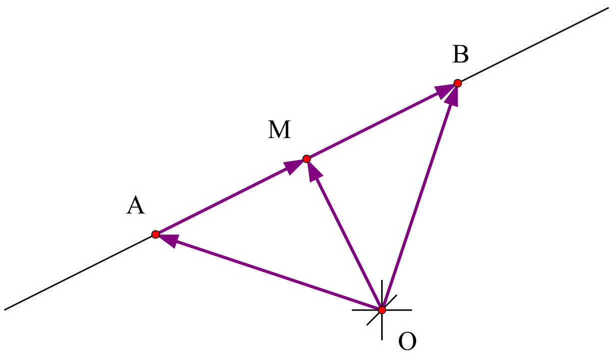
Der identische Fall ist ausgeschlossen, weil die Eckpunkte des Vierecks als nicht kollinear vorausgesetzt sind.

Die Diagonalen bieten, wie sicherlich bekannt ist, eine weitere Möglichkeit, Parallelogramme zu charakterisieren. Dazu benötigen wir jedoch einen neuen Begriff.

<u>(7.10) Definition</u>

Sei $\overline{AB}$ eine Strecke im Modellraum.

Ein Punkt M heißt *Mittelpunkt von* $\overline{AB}$, wenn $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ gilt.



Anschaulich besagt die Definition, dass die zum Vektor $\overrightarrow{AB}$ gehörende Verschiebung durch M in zwei gleiche Hälften unterteilt wird.

Dass eine Strecke nur einen Mittelpunkt besitzt, und wie man sich seine Koordinaten vektoriell verschafft, erläutert der folgende Satz.

(7.11) Satz
Sei $\overline{AB}$ eine Strecke im Modellraum, $A=(a_1\,;a_2\,;a_3)$ und $B=(b_1\,;b_2\,;b_3)$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) M ist Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

(2) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

(3) $\vec{M}=\vec{A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

(4) $M=\left(\frac{a_1+b_1}{2}\,;\frac{a_2+b_2}{2}\,;\frac{a_3+b_3}{2}\right)$

Beweis :
Wir führen einen Ringschluss durch.

„ $(1)\Rightarrow(2)$ “:
Wegen $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ folgt der Reihe nach

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=2\,\overrightarrow{AM}\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{AM}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\quad\Rightarrow\quad\vec{M}=\vec{A}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

„ $(2)\Rightarrow(3)$ “:

$$\overrightarrow{AM}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\quad\Rightarrow\quad\vec{M}-\vec{A}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\quad\Rightarrow\quad\vec{M}=\vec{A}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

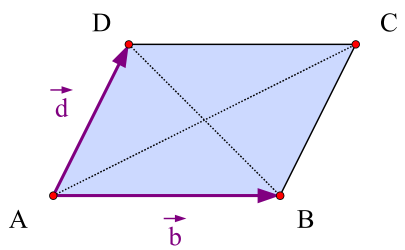
„ $(3)\Rightarrow(4)$ “:

$$\vec{M}=\vec{A}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$

„ $(4)\Rightarrow(1)$ “:
Berechne mit Hilfe der Koordinaten von A, M und B die Koordinaten von $\overrightarrow{AM}$ und $\overrightarrow{MB}$.

Nun folgt die angekündigte Charakterisierung des Parallelogramms mit Hilfe der Diagonalen.

(7.12) Satz („Diagonalenkriterium für Parallelogramme“)
Ein Viereck $\langle ABCD\rangle$ ist genau dann ein Parallelogramm, wenn sich seine Diagonalen gegenseitig halbieren, das heißt, in ihren Mittelpunkten schneiden.



Beweis :
Zur Abkürzung gelte $\vec{b}:=\overrightarrow{AB}$ und $\vec{d}:=\overrightarrow{AD}$.

„ ⇒ “:

Da $\langle ABCD \rangle$ ein Parallelogramm ist, gilt $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{d}$ und $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

Wir betrachten die Diagonalengeraden

$$AC : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\, \overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,(\vec{b} + \vec{d})$$

$$BD : \vec{X} = \vec{B} + \mu\, \overrightarrow{BD} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{X} = \vec{B} + \mu\,(-\vec{b} + \vec{d})$$

Sei M der Mittelpunkt von AC und N der Mittelpunkt von BD.

Dann gilt :

$$\vec{M} = \vec{A} + \tfrac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}) = \vec{A} + \tfrac{1}{2}\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{d}$$

$$\vec{N} = \vec{B} + \tfrac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{d}) = (\vec{A} + \vec{b}) - \tfrac{1}{2}\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{d} \; = \; \vec{A} + \tfrac{1}{2}\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{d}$$

M und N stimmen überein. Die Diagonalen schneiden sich in ihren Mittelpunkten.

„ ⇐ “:

Wir setzen jetzt voraus, dass sich die Diagonalen im Verhältnis 1:1 in einem Punkt M schneiden und $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ sowie $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$ gilt.

Damit erhalten wir

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}\ .$$

Nach Satz (7.9) ist $\langle ABCD \rangle$ ein Parallelogramm.

Sicherlich ist die Sprechweise „Der Mittelpunkt teilt die Strecke im Verhältnis 1:1“ bekannt. Auch durch sie soll ausgedrückt werden, dass die Strecke durch den Mittelpunkt in zwei gleich große Teile geteilt wird.

Wird auf einer Strecke ein Punkt aus der Mittelpunktslage herausbewegt, verändert sich das „Teilverhältnis“, in dem der Punkt die Strecke unterteilt. Teilverhältnisse sind das Thema des nächsten Paragraphen.