



Übungen zu §7

Übung 7.1

Untersuche, ob in dem Fünfeck $\langle ABCDE \rangle$ benachbarte Seitengeraden stets voneinander verschieden sind.

- (a) $A = (2; 1; -1)$ $B = (5; 3; -2)$ $C = (3; 0; -1)$ $D = (7; 6; -3)$ $E = (0; 4; -6)$
 (b) $A = (3; -1; 5)$ $B = (-7; 2; 4)$ $C = (0; 0; -2)$ $D = (-2; 2; 1)$ $E = (4; -2; 3)$

Übung 7.2

Bestimme alle Parameterwerte $p \in \mathbb{R}$, für die das Viereck $\langle AB C_p D \rangle$ ein Paar benachbarter Seitengeraden besitzt, die identisch sind.

$$A = (3; 1; 3) \quad B = (6; -5; 3) \quad C_p = (8 - p; -p; p) \quad D = (2; -3; 5)$$

Übung 7.3

Untersuche, ob das Viereck $\langle ABCD \rangle$ windschief ist.

- (a) $A = (2; 1; -1)$ $B = (9; -1; 9)$ $C = (8; -1; 6)$ $D = (4; 1; 2)$
 (b) $A = (11; 2; -6)$ $B = (0; 1; 1)$ $C = (7; 5; -2)$ $D = (8; -5; -7)$
 (c) $A = (-2; 0; -5)$ $B = (-2; -8; 3)$ $C = (4; -2; 3)$ $D = (7; 13; -9)$

Übung 7.4

Bestimme alle Parameterwerte $r \in \mathbb{R}$, für die das Viereck $\langle A_r B C_r D \rangle$ eben ist.

- (a) $A_r = (7; -r; 2r - 3)$ $B = (4; 6; -7)$ $C_r = (10 - 2r; -6; 3r + 1)$ $D = (6; 4; -6)$
 (b) $A_r = (0; 4; -3r)$ $B = (4; 6; -7)$ $C_r = (4r; 1; -r)$ $D = (10; 0; -4)$

Übung 7.5

Untersuche, ob das Viereck $\langle ABCD \rangle$ überschlagen ist.

- (a) $A = (11; 1; -6)$ $B = (-1; -7; 2)$ $C = (4; -5; -3)$ $D = (-2; -5; 6)$
 (b) $A = (4; 8; 0)$ $B = (6; 4; 3)$ $C = (-1; 3; -5)$ $D = (-4; 6; -9)$

Übung 7.6

Gegeben sind die Punkte $A = (4; 5; -2)$, $B = (2; 3; 3)$, $C = (-3; 8; -2)$ und die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Zeige, dass es einen Punkt D auf g gibt, sodass das sich die Seiten \overline{BC} und \overline{AD} des Vierecks $\langle ABCD \rangle$ in einem Punkt S schneiden. Berechne abschließend die Koordinaten von S und D .

Übung 7.7

Untersuche, ob das Viereck $\langle ABCD \rangle$ ein Trapez oder ein Parallelogramm ist.

- (a) $A = (3; 12; -7)$ $B = (5; 6; 1)$ $C = (1; 2; 5)$ $D = (-1; 8; -3)$
 (b) $A = (-1; -4; 9)$ $B = (3; 2; 1)$ $C = (5; 1; 3)$ $D = (3; -2; 7)$
 (c) $A = (5; -2; 6)$ $B = (7; 5; 5)$ $C = (6; 8; 5)$ $D = (4; 1; 6)$
 (d) $A = (3; -8; 3)$ $B = (4; 4; -1)$ $C = (-7; 3; 2)$ $D = (2; 0; -4)$

Übung 7.8

Gegeben sind die Punkte $A = (6; 2; -5)$, $B = (4; -2; 1)$ und die Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Zeige, dass es zu jedem Punkt C von g einen Punkt D auf h gibt, sodass $\langle ABCD \rangle$ ein Trapez mit den Parallelen AB und CD ist. Berechne die Koordinaten desjenigen Punktes C , für den das Trapez zum Parallelogramm wird.



Übung 7.9

Zeige, dass das Viereck $\langle ABCD \rangle$ ein Parallelogramm ist und berechne den Schnittpunkt der Diagonalen M.

- (a) $A = (1; -2; 9)$ $B = (4; -3; 2)$ $C = (5; -2; 1)$ $D = (2; -1; 8)$
 (b) $A = (-7; 4; -1)$ $B = (-6; 4; -4)$ $C = (-1; 6; -1)$ $D = (-2; 6; 2)$

Übung 7.10

Bestimme Punkt D so, dass das Dreieck $\langle ABC \rangle$ zu einem Parallelogramm ergänzt wird.

- (a) $A = (4; 1; -1)$ $B = (5; 0; 2)$ $C = (-4; 6; -3)$
 (b) $A = (5; 5; 7)$ $B = (-9; 2; 0)$ $C = (11; 8; 4)$

Übung 7.11

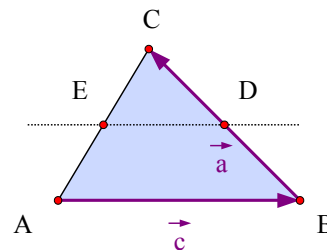
Gegeben sind die Punkte A und B eines Parallelogramms $\langle ABCD \rangle$ und sein Diagonalschnittpunkt M. Bestimme die Eckpunkte C und D.

- (a) $A = (4; 2; 1)$ $B = (-1; -4; 2)$ $M = (0; 3; -3)$
 (b) $A = (8; -8; -1)$ $B = (-4; 5; -7)$ $M = (2; 0; -3)$

Übung 7.12 („Mittellinien sind Mittelparallelen“)

Eine Gerade, die durch die Mittelpunkte zweier Seiten eines Dreiecks $\langle ABC \rangle$ aus drei nicht kollinearen Punkten verläuft, heißt „Mittellinie des Dreiecks“.

Beweise, dass jede Mittellinie parallel zur jeweils dritten Dreiecksseite ist.

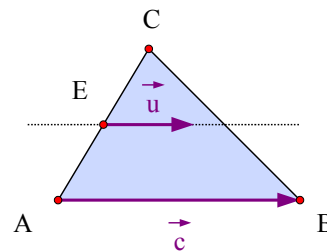


Übung 7.13 („Mittelparallelen sind Mittellinien“)

Eine Gerade, die durch den Mittelpunkt M einer Seite eines Dreiecks aus drei nicht kollinearen Punkten parallel zu einer der anderen beiden Seiten des Dreiecks verläuft, heißt „Mittelparallele des Dreiecks“.

Beweise, dass eine Mittelparallele die jeweils dritte Dreiecksseite in ihrem Mittelpunkt schneidet und daher eine Mittellinie des Dreiecks ist.

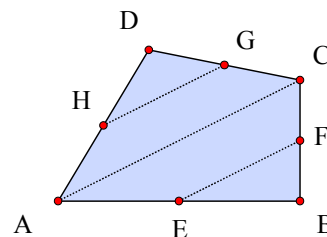
[Tipp: Verwende das Ergebnis von Übung 7.12!]



Übung 7.14

Beweise, dass die Mittelpunkte der vier Seiten eines Vierecks immer Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

[Tipp: Beide Diagonalen zerlegen das Viereck in zwei Dreiecke. Wende nun das Ergebnis von Übung 7.12 an!]



Übung 7.15

Beweise:

- (a) Trapeze können überschlagen sein.
- (b) Parallelogramme können nicht überschlagen sein.
- (c) Ein Viereck mit parallelen Diagonalengeraden ist überschlagen.
- (d) Ein überschlagenes Viereck ist eben.

[Hinweis: Die Lösungen der Beweisaufgaben (c) und (d) sind mit den bisher verfügbaren mathematischen Mitteln schwierig. Mit den Mitteln des Paragraphen §9 gelangen sie erheblich leichter.]