Übung 7.1

(a) Die Vektoren benachbarter Seiten werden auf lineare Abhängigkeit untersucht:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix};\ \vec{BC} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix};\ \vec{CD} = \begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix};\ \vec{DE} = \begin{pmatrix}-7\\-2\\-3\end{pmatrix};\ \vec{EA} = \begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{BC}$ und $\vec{CD}$ sind linear abhängig. Da die Seitengeraden BC und CD den gemeinsamen Punkt C besitzen, sind sie identisch.

An den anderen Eckpunkten schneiden sich die benachbarten Seitengeraden in diesem Eckpunkt, weil ihre Richtungsvektoren linear unabhängig sind.

(b) $$\vec{AB} = \begin{pmatrix}-10\\3\\-1\end{pmatrix};\ \vec{BC} = \begin{pmatrix}7\\-2\\-6\end{pmatrix};\ \vec{CD} = \begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix};\ \vec{DE} = \begin{pmatrix}6\\-4\\2\end{pmatrix};\ \vec{EA} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Je zwei benachbarte Seitengeraden besitzen linear unabhängige Richtungsvektoren; deshalb können sie nicht identisch sein.

Übung 7.2

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix};\ \vec{BC_p} = \begin{pmatrix}2-p\\-p+5\\p-3\end{pmatrix};\ \vec{C_pD} = \begin{pmatrix}-6+p\\-3+p\\5-p\end{pmatrix};\ \vec{DA} = \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$$

$$\lambda \vec{AB} = \vec{BC_p} \iff \lambda \begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-p\\-p+5\\p-3\end{pmatrix}$$

(1) $3\lambda = 2-p$

(2) $-6\lambda = -p+5$

(3) $0 = p-3 \Rightarrow p=3$

(3) → (1) $3\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$ (4)

(3) → (2) $-6\lambda = 2$

(4) → (2) $-6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$ [wahr]

Fazit:

Für $p=3$ sind die Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{BC_p}$ linear abhängig; also gilt für $p=3$: $AB = BC_p$

Für alle anderen Werte von p gilt $AB \neq BC_p$.

$$\overrightarrow{BC_p} = \mu\,\overrightarrow{C_pD} \iff \begin{pmatrix} 2-p \\ -p+5 \\ p-3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -6+p \\ -3+p \\ 5-p \end{pmatrix}$$

(1) $2-p = -6\mu + \mu \cdot p \iff \mu p + p = 6\mu + 2 \iff p(\mu+1) = 6\mu+2$

(2) $-p+5 = -3\mu + \mu \cdot p \iff \mu p + p = 3\mu + 5 \iff p(\mu+1) = 3\mu+5$

(3) $p-3 = 5\mu - \mu \cdot p \iff \mu p + p = 5\mu + 3 \iff p(\mu+1) = 5\mu+3$

Offenbar führt die Setzung $\mu = -1$ zu falschen Aussagen, daher gelte im Folgenden $\mu \neq -1$. Wir erhalten dann

(2) = (1) : $6\mu + 2 = 3\mu + 5 \iff 3\mu = 3 \iff \mu = 1$

(3) = (2) : $3\mu + 5 = 5\mu + 3 \iff 2 = 2\mu \iff \mu = 1$

~~(3)~~ Das Gleichungssystem ist nur für $\mu = 1$ lösbar.

(1) : $p \cdot 2 = 6 + 2 \iff 2p = 8 \iff p = 4$

Fazit: Für $p = 4$ sind die Vektoren $\overrightarrow{BC_p}$ und $\overrightarrow{C_pD}$ linear abhängig; also gilt für $p = 4$: $BC_p = C_pD$

Für alle anderen Werte von p gilt: $BC_p \neq C_pD$.

$$\overrightarrow{C_pD} = \nu\,\overrightarrow{DA} \iff \begin{pmatrix} -6+p \\ -3+p \\ 5-p \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(1) $-6 + p = \nu \iff p = \nu + 6$

(2) $-3 + p = 4\nu \iff p = 4\nu + 3$

(3) $5 - p = -2\nu \iff p = 2\nu + 5$

(1) = (2) : $\nu + 6 = 4\nu + 3 \iff 3\nu = 3 \iff \nu = 1$

(2) = (3) : $4\nu + 3 = 2\nu + 5 \iff 2\nu = 2 \iff \nu = 1$

Das Gleichungssystem ist nur für $\nu = 1$ lösbar.

(1) : $p = 1 + 6 = 7$

Fazit: Für $p = 7$ sind die Vektoren $\overrightarrow{C_pD}$ und $\overrightarrow{DA}$ linear abhängig; also gilt für $p = 7$: $C_pD = DA$

Für alle anderen Werte von p gilt: $C_pD \neq DA$.

Übung 7.3

(a) Wir untersuchen die Diagonalengeraden.

$$AC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad BD: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

Schnittpunktansatz:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad 6\lambda + 5\mu = 7 \\
&(2) \quad -2\lambda - 2\mu = -2 \iff -14\lambda - 14\mu = -14 \\
&(3) \quad 7\lambda + 7\mu = 10 \iff 14\lambda + 14\mu = 20
\end{aligned}$$

$(2)+(3): \quad 0 = 6$ [falsch]

AC und BD sind windschief, also auch das Viereck $\langle ABCD \rangle$.

(b) $$AC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad BD: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind linear abhängig.

Punktprobe $B \in AC$: $$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \iff \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Offenbar liegt B nicht auf AC. AC und BD sind parallel.

Das Viereck $\langle ABCD \rangle$ ist eben.

(c) $$AC: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad BD: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig. Schnittpunktansatz:

$$\begin{aligned}
&[(1) \quad 6\lambda - 9\mu = 0] \\
&(2) \quad -2\lambda - 21\mu = -8 \iff -8\lambda - 84\mu = -32 \\
&(3) \quad 8\lambda + 12\mu = 8
\end{aligned}$$

$(2)+(3): \quad -72\mu = -24 \iff \mu = \frac{1}{3} \quad (4)$

$(4) \to (3): \quad 8\lambda + 4 = 8 \iff 8\lambda = 4 \iff \lambda = \frac{1}{2} \quad (5)$

$(4),(5) \to (1): \quad 3 - 3 = 0$ [wahr] AC und BD schneiden sich.

Das Viereck $\langle ABCD \rangle$ ist eben.

Übung 7.4

(a) $A_rC_r: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -r \\ 2r-3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3-2r \\ -6+r \\ r+4 \end{pmatrix}$ $\quad BD: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3-2r \\ -6+r \\ r+4 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $3-2r = 2\mu$

(2) $-6+r = -2\mu$

[(3) $r+4 = \mu$]

(1)+(2) : $-3-r = 0 \iff r = -3$ (4)

(4)→(1) : $3+6 = 2\mu \iff \mu = \frac{9}{2}$ (5)

(4),(5)→(3) $-3+4 = \frac{9}{2}$ [falsch]

Die Richtungsvektoren von A_rC_r und BD sind linear unabhängig $\forall r \in \mathbb{R}$.

Schnittpunktansatz:

(1) $(3-2r)\lambda - 2\mu = -3$

(2) $(-6+r)\lambda + 2\mu = 6+r$

(3) $(r+4)\lambda - \mu = -4-2r \iff (2r+8)\lambda - 2\mu = -8-4r$

(1)+(2) : $-3\lambda - r\lambda = 3+r \iff -9\lambda - 3r\lambda = 9+3r$ (4)

(2)+(3) : $2\lambda + 3r\lambda = -2-3r$ (5)

(4)+(5) : $-7\lambda = 7 \iff \lambda = -1$ (6)

(6)→(1) : $-3+2r-2\mu = -3 \iff 2r = 2\mu \iff \mu = r$

(6)→(2) : $6-r+2\mu = 6+r \iff 2\mu = 2r \iff \mu = r$

(6)→(3) : $-r-4-\mu = -4-2r \iff r = \mu$

Die Diagonalengeraden schneiden sich $\forall r \in \mathbb{R}$ in genau einem Punkt. Das Viereck $\langle A_r B C_r D \rangle$ ist eben $\forall r \in \mathbb{R}$.

(6) $A_rC_r: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3r \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4r \\ -3 \\ 2r \end{pmatrix}$ $BD: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4r \\ -3 \\ 2r \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) $4r = 6\mu$

(2) $-3 = -6\mu \iff \mu = \frac{1}{2}$

[(3) $2r = 3\mu$]

$(2) \rightarrow (1): \quad 4r = 6 \cdot \frac{1}{2} \iff r = \frac{3}{4} \quad (4)$

$(2),(4) \rightarrow (3): \quad 2 \cdot \frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2}$ [wahr]

Für $r = \frac{3}{4}$ sind die Diagonalen parallel oder identisch und damit das Viereck $\langle A_rBC_rD \rangle$ eben.

Schnittpunktansatz für $r \neq \frac{3}{4}$:

(1) $4r\lambda - 6\mu = 4$

(2) $-3\lambda + 6\mu = 2$

(3) $2r\lambda - 3\mu = -7 + 3r \iff -4r\lambda + 6\mu = 14 - 6r$

$(1)+(3): \quad 0 = 18 - 6r \iff r = 3 \quad (4)$

$(4) \rightarrow (1): \quad 12\lambda - 6\mu = 4 \quad (5)$

$(4) \rightarrow (2): \quad -3\lambda + 6\mu = 2 \quad (6)$

$(4) \rightarrow (3): \quad 6\lambda - 3\mu = 2 \quad (7)$

$(5)+(6): \quad 9\lambda = 6 \iff \lambda = \frac{2}{3} \quad (8)$

$(8) \rightarrow (5): \quad 8 - 6\mu = 4 \iff 6\mu = 4 \iff \mu = \frac{2}{3} \quad (9)$

$(8),(9) \rightarrow (7): \quad 6 \cdot \frac{2}{3} - 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$ [wahr]

Für $r = 3$ schneiden sich die Diagonalen in genau einem Punkt. Auch für diesen Wert ist das Viereck $\langle A_rBC_rD \rangle$ eben.

Das Viereck ist windschief $\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}; 3\}$

Übung 7.5

(a) Es ist zu prüfen, ob sich die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ oder die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ in einem Punkt schneiden.

$$AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \; ; \; CD: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

Schnittpunktansatz:

$(1) \quad -12\lambda + 6\mu = -7$

$(2) \quad -8\lambda = -6 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{3}{4}$

$[(3) \quad 8\lambda - 9\mu = 3]$

$(2) \to (1): \quad -9 + 6\mu = -7 \quad \Leftrightarrow \quad 6\mu = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{1}{3} \quad (4)$

$(2),(4) \to (3): \quad 8 \cdot \frac{3}{4} - 9 \cdot \frac{1}{3} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 6 - 3 = 3 \quad$ [wahr]

Die Geraden AB und CD schneiden sich in genau einem Punkt S.
Weil die „Schnittparameter" $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{3}$ im Intervall $[0;1]$ liegen ist S ein gemeinsamer Punkt von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.
Das Viereck ⟨ABCD⟩ ist überschlagen.

(b) $$AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad CD: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

Schnittpunktansatz:

$(1) \quad 2\lambda + 3\mu = -5$

$(2) \quad -4\lambda - 3\mu = -5$

$[(3) \quad 3\lambda + 4\mu = -5]$

$(1) + (2): \quad -2\lambda = -10 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 5 \quad (4)$

$(4) \to (1): \quad 10 + 3\mu = -5 \quad \Leftrightarrow \quad 3\mu = -15 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -5 \quad (5)$

$(4),(5) \to (3): \quad 3 \cdot 5 + 4(-5) = -5 \quad$ [wahr]

Die Geraden AB und CD schneiden sich außerhalb der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.

$$BC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad AD: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

Schnittpunktansatz:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad -7\lambda + 8\mu = -2 \\
&(2) \quad -\lambda + 2\mu = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 7\lambda - 14\mu = -28 \\
&[(3) \quad -8\lambda + 9\mu = -3]
\end{aligned}$$

$(1)+(2)$: $\quad -6\mu = -30 \Leftrightarrow \mu = +5 \quad (4)$

$(4) \to (1)$: $\quad -7\lambda + 40 = -2 \Leftrightarrow -7\lambda = -42 \Leftrightarrow \lambda = 6 \quad (5)$

$(4),(5) \to (3)$: $\quad -8 \cdot 6 + 9 \cdot 5 = -3 \Leftrightarrow -48 + 45 = -3$ [wahr]

Die Geraden BC und AD schneiden sich ebenfalls außerhalb der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$.

Das Viereck ⟨ABCD⟩ ist nicht überschlagen (aber eben!).

Übung 7.6

$$BC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad AD: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3\lambda \\ -3 \\ -2\lambda + 6 \end{pmatrix}$$

$$\nu \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ -3 \\ -2\lambda + 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&(1) \quad 3\lambda + 5\nu = 0 \\
&(2) \quad -5\nu = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \nu = -\tfrac{3}{5} \\
&(3) \quad -2\lambda + 5\nu = -6
\end{aligned}$$

$(2) \to (1)$: $\quad 3\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \quad (4)$

$(2),(4) \to (3)$: $\quad -2 \cdot 1 + 5 \cdot \left(-\tfrac{3}{5}\right) = -6 \Leftrightarrow -5 = -6$ [f]

Die Richtungsvektoren sind $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ linear unabhängig.

Schnittpunktansatz:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad -5\nu - 3\lambda\mu = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -10\nu - 6\lambda\mu = 4 \\
&(2) \quad 5\nu + 3\mu = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 25\nu + 15\mu = 10 \\
&(3) \quad -5\nu + 2\lambda\mu - 6\mu = -5 \quad \Leftrightarrow \quad -15\nu + 6\lambda\mu - 18\mu = -15
\end{aligned}$$

$(1)+(3)$: $\quad -25\nu - 18\mu = -11 \quad (4)$

$(2)+(4)$: $\quad -3\mu = -1 \Leftrightarrow \mu = \tfrac{1}{3} \quad (5)$

$$(5) \to (2): \quad 5\nu + 1 = 2 \iff 5\nu = 1 \iff \nu = \frac{1}{5} \quad (6)$$

$$(5),(6) \to (1): \quad -5\cdot\frac{1}{5} - 3\cdot\frac{1}{3}\lambda = 2 \iff -1 - \lambda = 2 \iff \lambda = -3 \quad (7)$$

$$(5),(6),(7) \to (3): \quad -5\cdot\frac{1}{5} + 2\cdot(-3)\cdot\frac{1}{3} - 6\cdot\frac{1}{3} = -5 \iff -1-2-2 = -5 \quad [W]$$

Die Geraden BC und AD schneiden in genau einem Punkt S, falls $D \in g$ wie folgt gewählt wird: $\vec{D} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\2\\10\end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt S ist gegeben durch $\vec{S} = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5\\5\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$.

Übung 7.7

(a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}2\\-6\\8\end{pmatrix}$ $\vec{CD} = \begin{pmatrix}-2\\6\\-8\end{pmatrix}$ $\vec{AD} = \begin{pmatrix}-4\\-4\\4\end{pmatrix}$ $\vec{BC} = \begin{pmatrix}-4\\-4\\4\end{pmatrix}$

Wegen $\vec{AB} = \underline{-}\vec{CD}$ ist das Viereck $\langle ABCD \rangle$ ein Parallelogramm.

Die Berechnung von $\vec{AD}$ und $\vec{BC}$ ist überflüssig!

(b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}4\\6\\-8\end{pmatrix}$ $\vec{CD} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\4\end{pmatrix}$ $\vec{AB} = -2\cdot\vec{CD}$

Das Viereck $\langle ABCD \rangle$ ist ein Trapez.

(c) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}2\\7\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{DC} = \begin{pmatrix}2\\7\\-1\end{pmatrix}$

Wegen $\vec{AB} = \vec{DC}$ liegt ein Parallelogramm vor.

(d) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\12\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{DC} = \begin{pmatrix}-9\\3\\6\end{pmatrix}$ $\vec{AD} = \begin{pmatrix}-1\\8\\-7\end{pmatrix}$ $\vec{BC} = \begin{pmatrix}-11\\-1\\3\end{pmatrix}$

$\langle ABCD \rangle$ ist kein Trapez.

Übung 7.8

$A = (6; 2; -5)$, $B = (4; -2; 1)$ $\quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Es liegt genau dann ein Trapez vor, wenn $\nu \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\nu \vec{AB} = \vec{DC} \iff \nu \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) $\quad -2\lambda - \mu + 2\nu = -1 \iff -10\lambda - 5\mu + 10\nu = -5$

(2) $\quad 3\lambda + 5\mu + 4\nu = -2$

(3) $\quad 4\lambda + \mu - 6\nu = 3$

(1)+(3): $\quad 2\lambda - 4\nu = 2 \iff \lambda - 2\nu = 1 \iff \nu = \frac{\lambda - 1}{2}$ $\quad$ (4)

(1)+(2): $\quad -7\lambda + 14\nu = -7 \iff \lambda - 2\nu = 1$

(4) → (1): $\quad -2\lambda - \mu + 2 \cdot \frac{\lambda - 1}{2} = -1 \iff -\lambda - \mu = 0 \iff \mu = -\lambda$

Ist C durch die Wahl des Parameters $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben, so

D mit $\vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Punkt auf h,

der zusammen mit C das Viereck ⟨ABCD⟩ zu einem Trapez macht. Im Fall $\lambda = 3$ gilt $\nu = \frac{3-1}{2} = 1$ und damit $\vec{AB} = \vec{DC}$.

Für $\lambda = 3$ ist das Trapez sogar ein Parallelogramm.

Der Punkt C ist in diesem Fall gegeben durch $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}$

Übung 7.9

(a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{DC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$. Wegen $\vec{AB} = \vec{DC}$ ist das Viereck ⟨ABCD⟩ ein Parallelogramm. $M = (3; -2; 5)$

(b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $M = (-4; 5; -1)$

Übung 7.10

(a) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Damit ein Parallelogramm $\langle ABCD \rangle$ vorliegt, muss $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ gelten. Daraus folgt:

$$\vec{D} = \vec{C} + \overrightarrow{CD} = \vec{C} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(b) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\vec{D} = \vec{C} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$

Übung 7.11

(a) Da M der gemeinsame Mittelpunkt von $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ ist, gilt:

$$\vec{C} = \vec{A} + 2 \cdot \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D} = \vec{B} + 2\,\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(b) $\vec{C} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\vec{D} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Übung 7.12

O.B.d.A betrachten wir die Mittelpunkte D von $\overline{BC}$ und E von $\overline{AC}$ im Dreieck $\langle ABC \rangle$. Gelte $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$; dann ist $\overrightarrow{AC} = \vec{c} + \vec{a}$.

Damit folgt:

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \tfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) - \tfrac{1}{2}\vec{a} = \tfrac{1}{2}\vec{c} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Also sind die Vektoren $\overrightarrow{ED}$ und $\overrightarrow{AB}$ linear abhängig.

Ist $C \notin AB$, weil es sich um ein echtes Dreieck handelt, so kann auch E nicht auf AB liegen, denn andernfalls wäre $\overrightarrow{AE}$ linear abhängig von $\overrightarrow{AB}$ und daher auch $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$.

Die Geraden ED und AB müssen also parallel sein.

Übung 7.13

O.B.d.A. Betrachten wir den Mittelpunkt E der Seite $\overline{AC}$.
Sei $g: \vec{x} = \vec{E} + \lambda \vec{AB}$ die Mittelparallele zu AB durch E.
Ist nun D der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$, so ist die Gerade DE ebenfalls gemäß Übung 7.12 parallel zu AB.
Die Geraden g und DE haben linear abhängige Richtungsvektoren und sind daher parallel oder identisch.
Weil sie beide den Punkt E enthalten, müssen sie identisch sein. Deswegen liegt der Punkt D auf der Geraden g.

Übung 7.14 (unter Verwendung von Übung 6.8a)

Seien die Eckpunkte des Vierecks und die vier Seitenmittelpunkte namentlich, so wie in der Zeichnung gegeben, festgelegt.
Betrachten wir das Dreieck $<ABC>$, so ist EF als Mittellinie parallel zu AC. Betrachten wir das Dreieck $<ACD>$, so gilt das gleiche für die Mittellinie GH. Also gilt $EF \parallel GH$.
Teilen wir das Viereck $<ABCD>$ durch die Diagonale BD in zwei Teildreiecke, so folgt mit gleicher Argumentation $EH \parallel FG$.
Also ist das Viereck $<EFGH>$ ein Parallelogramm.

Übung 7.15

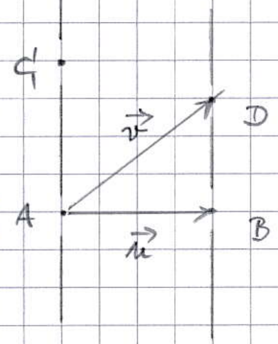
(a) Wir liefern ein Beispiel:

$A=(0;0;0)$; $B=(2;0;0)$; $C=(-1;3;0)$; $D=(0;3;0)$

Die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ schneiden sich im Punkt $S=(0;2;0)$

(b) Da die gegenüber liegenden Seiten in einem Parallelogramm gemäß Definition parallel sind, können sie keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Ein Parallelogramm kann nicht überschlagen sein.

(c) Gelte im Viereck <ABCD> $AC \parallel BD$.



Die Vektoren $\vec{u} := \vec{AB}$ und $\vec{v} := \vec{AD}$ seien linear unabhängig.

[$\vec{u}$ und $\vec{v}$ können nicht linear abhängig sein, weil dann $AB = AD$ gelten würde. Daraus ergäbe sich $A \in BD$ im Widerspruch zur Voraussetzung $AC \parallel BD$!]

Dann folgt $\vec{BD} = -\vec{u} + \vec{v}$.

Wegen $AC \parallel BD$ muss es einen Skalar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ geben mit $\vec{AC} = \alpha \vec{BD}$. Gelte $\alpha > 0$ (1. Fall).

Wir betrachten die Seitengeraden AD und BC.

$AD: \vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{v}$

$BC: \vec{x} = \vec{B} + \mu \vec{BC} \iff \vec{x} = \vec{B} + \mu(\vec{BA} + \vec{AC})$

$\iff \vec{x} = \vec{B} + \mu(-\vec{u} + \alpha(-\vec{u} + \vec{v}))$

Schnittpunktansatz $AD \cap BC$:

$\vec{A} + \lambda \vec{v} = \vec{B} + \mu(-\vec{u} - \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v})$

$\iff \vec{0} = \vec{AB} - \lambda \vec{v} + \mu(-\vec{u} - \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v})$

$\iff \vec{0} = (1 - \mu - \alpha\mu)\vec{u} + (-\lambda + \alpha\mu)\vec{v}$

Aus dem Nullvektorkriterium für linear unabhängige Vektoren folgt:

(1) $1 - \mu - \alpha\mu = 0 \iff 1 = (1+\alpha)\mu \overset{\alpha > 0!}{\iff} \mu = \frac{1}{1+\alpha}$

(2) $-\lambda + \alpha\mu = 0 \iff \lambda = \alpha\mu$

(1) $\to$ (2): $\lambda = \frac{\alpha}{1+\alpha}$

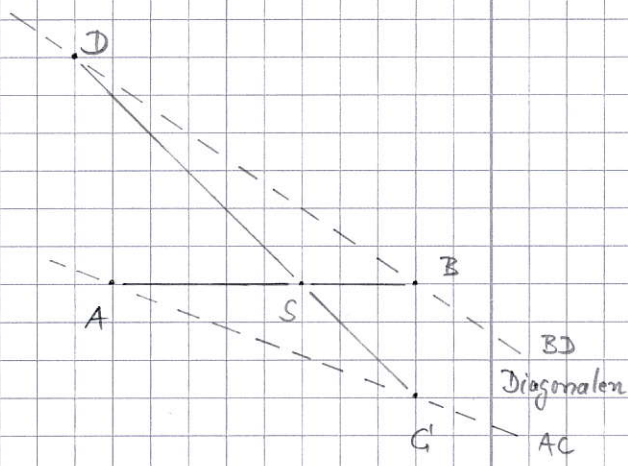
Aus $\alpha > 0$ folgt $0 < \mu < 1$ und $0 < \lambda < 1$

AD und BC schneiden sich in einem Punkt S, der auf $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ liegt.

2. Fall: $\alpha < 0$ Völlig analog ergibt sich, dass sich nun die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ in einem Punkt schneiden.

(d) O.B.d.A gelte $\overline{AB} \cap \overline{DC} = \{S\}$

und damit auch $AB \cap DC = \{S\}$.



Dann sind die Vektoren

$\vec{u} := \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} := \overrightarrow{DC}$

zwangsläufig linear unabhängig.

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass

$\vec{S} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ und $\vec{S} = \vec{D} + \mu \vec{v}$ gilt.

Daraus ergibt sich $\overrightarrow{AS} = \lambda \vec{u}$ und $\overrightarrow{DS} = \mu \vec{v}$ sowie $\overrightarrow{SD} = -\mu \vec{v}$

Es ist nachzuweisen, dass die Diagonalengeraden AC und BD unter den gegebenen Voraussetzungen nicht windschief sein können.

Gelte $AC: \vec{x} = \vec{A} + \rho \overrightarrow{AC}$ und $BD: \vec{x} = \vec{B} + \sigma \overrightarrow{BD}$.

Wir untersuchen zunächst, unter welchen Voraussetzungen die beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ linear abhängig sind:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DC} = \lambda \vec{u} - \mu \vec{v} + \vec{v}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} = -\vec{u} + \lambda \vec{u} - \mu \vec{v}$$

$$\alpha \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \iff \alpha(\lambda \vec{u} - \mu \vec{v} + \vec{v}) = -\vec{u} + \lambda \vec{u} - \mu \vec{v}$$

$$\iff (\alpha\lambda + 1 - \lambda)\vec{u} + (-\alpha\mu + \alpha + \mu)\vec{v} = \vec{0}$$

Aus dem Nullvektorkriterium folgt, dass diese Gleichung nur trivial gelöst wird:

$$(1) \quad \alpha\lambda + 1 - \lambda = 0 \iff \alpha \cdot \lambda \cdot (1-\mu) + (1-\mu)\cdot(1-\lambda) = 0$$

$$(2) \quad -\alpha\mu + \alpha + \mu = 0 \iff (1-\mu)\cdot\alpha\cdot\lambda + \lambda\mu = 0$$

$(1)-(2)$: $\quad 1 - \mu - \lambda + \lambda\mu - \lambda\mu = 0 \iff \lambda + \mu = 1$

Gilt $\lambda + \mu = 1$, sind die Diagonalen AC und BD parallel oder identisch. Wir werden nun zeigen, dass AC und BD genau einen Schnittpunkt T besitzen, falls $\lambda + \mu \neq 1$ gilt.

Damit ist dann ausgeschlossen, dass AC und BD windschief sind!

Schnittpunktansatz $AC \cap BD$:

$$\vec{A} + \rho \vec{AC} = \vec{B} + \sigma \vec{BD}$$

$$\Leftrightarrow \rho \vec{AC} - \sigma \vec{BD} = \vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \rho(\lambda \vec{u} - \mu \vec{v} + \vec{v}) - \sigma(-\vec{u} + \lambda \vec{u} - \mu \vec{v}) = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \rho\lambda\vec{u} - \rho\mu\vec{v} + \rho\vec{v} + \sigma\vec{u} - \sigma\lambda\vec{u} + \sigma\mu\vec{v} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow (\rho\lambda + \sigma - \sigma\lambda - 1)\vec{u} + (-\rho\mu + \rho + \sigma\mu)\vec{v} = \vec{0}$$

Diese Vektorgleichung wird genau dann gelöst, wenn das folgende Gleichungssystem lösbar ist:

$$(1) \quad \lambda\rho + (1-\lambda)\sigma = 1 \Leftrightarrow \lambda(1-\mu)\rho + (1-\lambda)(1-\mu)\sigma = (1-\mu)$$

$$(2) \quad (1-\mu)\rho + \mu\sigma = 0 \Leftrightarrow \lambda(1-\mu)\rho + \lambda\mu\sigma = 0$$

$$(1)-(2): \quad (1-\lambda-\mu+\lambda\mu-\lambda\mu)\sigma = 1-\mu \underset{\lambda+\mu\neq 1}{\Leftrightarrow} \sigma = \frac{1-\mu}{1-\lambda-\mu} \quad (3)$$

$$(3)\to(2): \quad (1-\mu)\rho + \frac{\mu(1-\mu)}{1-\lambda-\mu} = 0 \Leftrightarrow \rho = \frac{-\mu}{1-\lambda-\mu}$$

Die Diagonalen schneiden sich für $\lambda+\mu \neq 1$ in genau einem Punkt T.

Für $\mu = 1$ folgt $\vec{S} = \vec{C}$ sowie $\sigma = 0$ und $\rho = \frac{-1}{1-\lambda-1} = \frac{1}{\lambda}$ und daher $T = B$.