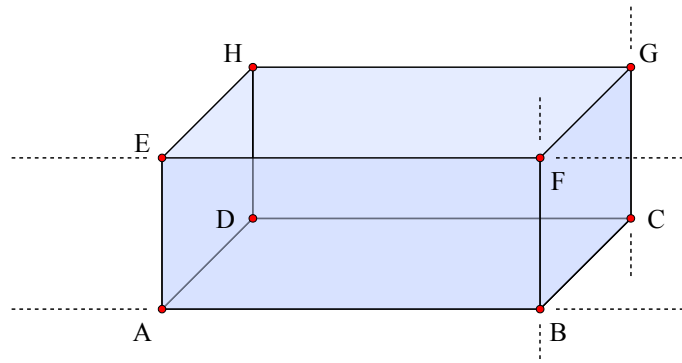




§6 Lagebeziehungen zwischen Geraden

Die Betrachtung der Kanten eines Quaders führt zur Erkenntnis, dass sich im Anschauungsraum vier verschiedene Lagebeziehungen für je zwei Geraden unterscheiden lassen.



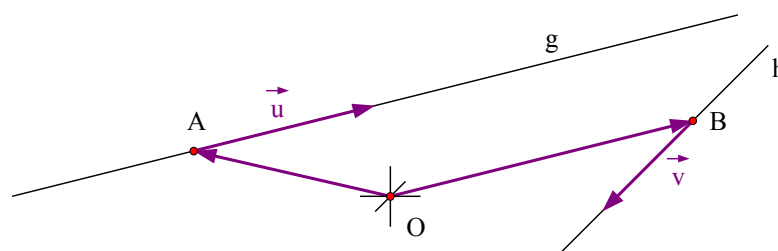
- Die Geraden AB und BA sind identisch.
- Die Geraden AB und EF sind parallel.
- Die Geraden AB und CG sind windschief.
- Die Geraden AB und BF schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich B.

Diese vier Lagebeziehungen sollen in den Modellraum übertragen werden. Auf der Suche nach geeigneten Kriterien gehen wir davon aus, dass die Kantengeraden gemäß Definition (5.1) vektoriell erfasst sind. Unsere Anschauung sagt uns zu ...

- ... AB und BA:
 - Alle Punkte sind gemeinsame Punkte; das gilt insbesondere für die Stützpunkte.
 - Ihre Richtungsvektoren sind Gegenvektoren voneinander: $\vec{AB} = -\vec{BA}$
- ... AB und EF:
 - Die Geraden haben keine gemeinsamen Punkte.
 - Ihre Richtungsvektoren sind gleich: $\vec{AB} = \vec{EF}$
- ... AB und CG:
 - Die Geraden haben keine gemeinsamen Punkte.
 - Ihre Richtungsvektoren sind keine Vielfachen voneinander.
- ... AB und BF:
 - Die Geraden haben genau einen gemeinsamen Punkt.
 - Ihre Richtungsvektoren sind keine Vielfachen voneinander.

Aus diesen Beispielen entnehmen wir, dass es offensichtlich zwei analytische Kriterien gibt, die im Modellraum für die Charakterisierung der Beziehung zweier Geraden genutzt werden können:

- (1) Die Schnittmenge ist leer – oder sie ist nicht leer.
- (2) Die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander – oder sie sind es nicht.





Um sogleich die endgültige Sprechweise für die Definition der Lagebeziehungen verwenden zu können, wird vor ihrer Formulierung für das zweite Kriterium ein neuer Begriff eingeführt. Das bringt uns zwar für eine kurze Strecke vom eingeschlagenen Weg ab; der Abstecher lohnt sich aber, weil sich der neue Begriff von großer Tragweite erweisen wird.

(6.1) Definition

Zwei Vektoren \vec{u} und \vec{v} heißen *linear abhängig*, wenn (wenigstens) einer der beiden ein skalares Vielfaches des anderen ist, das heißt,

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \text{ sodass } \vec{u} = \lambda \vec{v} \text{ oder } \vec{v} = \lambda \vec{u} \text{ gilt.}$$

Ist die Bedingung nicht erfüllt, werden die Vektoren \vec{u} und \vec{v} *linear unabhängig* genannt.

Offenbar sind zwei Vektoren immer linear abhängig, wenn einer der beiden der Nullvektor ist, denn der Nullvektor ist das 0-fache eines jeden anderen Vektors.

Die Situation, in der genau einer von zwei Vektoren der Nullvektor ist, macht es nötig, die Abhängigkeitsbedingung in der vorstehenden Weise zu formulieren. Ist nämlich der Vektor \vec{u} vom Nullvektor verschieden, so gilt zwar $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$, aber es gibt kein λ aus \mathbb{R} , sodass $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{0}$ geschrieben werden kann. Nur wenn bekannt ist, dass beide Vektoren vom Nullvektor verschieden sind, kann die Abhängigkeitsbedingung enger gefasst werden.

(6.2) Bemerkung

Seien \vec{u} und \vec{v} zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) \vec{u} und \vec{v} sind linear abhängig
- (2) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{u} = \lambda \vec{v}$
- (3) $\exists \mu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \mu \vec{u}$

Beweis:

Wir führen einen Ringschluss durch.

„(1) \Rightarrow (2)“:

Nach Definition (6.1) gibt es einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ oder $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ gilt. Im ersten Fall ist nichts zu zeigen. Im zweiten Fall muss $\lambda \neq 0$ gelten, weil andernfalls der Vektor \vec{v} im Widerspruch zur Voraussetzung der Nullvektor wäre. Dann folgt aber

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) \vec{u} = \frac{1}{\lambda} (\lambda \vec{u}) = \frac{1}{\lambda} \vec{v}$$

Der Vektor \vec{u} ist also auch im zweiten Fall ein skalares Vielfaches des Vektors \vec{v} .

„(2) \Rightarrow (3)“: Übung für den Leser

„(3) \Rightarrow (1)“: trivial

Es sei angemerkt, dass die in den Punktgleichungen von Geraden verwendeten Richtungsvektoren immer vom Nullvektor verschieden sind. Werden also die beiden Richtungsvektoren zweier Geraden betrachtet, ist die Voraussetzung von Bemerkung (6.2) grundsätzlich erfüllt.

Mit dem Begriff der Linearen Abhängigkeit, kann das „Richtungskriterium für Geradenpunkte“ (Lemma 5.4) neu formuliert werden. In dieser Formulierung werden wir es immer wieder benutzen.

(5.4) Lemma „Richtungskriterium für Geradenpunkte“ (Neuformulierung)

Sei g eine Gerade, P ein Punkt von g und \vec{u} ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor von g .

Dann gilt für jeden Punkt Q des Modellraumes:

Q ist genau dann auch ein Punkt der Geraden g , wenn die Vektoren \vec{PQ} und \vec{u} linear abhängig sind.

Hinweis: Die Kennnummer (5.4) des Richtungskriteriums ist für die Neuformulierung nicht geändert worden.

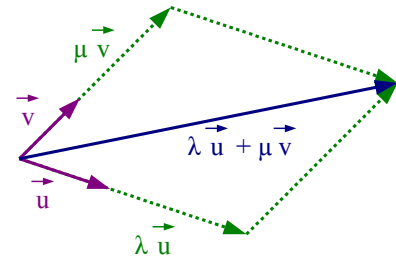


Für die Praxis ist es wichtig, auch ein positives Kriterium für die lineare Unabhängigkeit von zwei Vektoren zu haben. Um dieses Kriterium eingängig zu formulieren, ist ein weiterer Fachbegriff erforderlich:

6.3 Definition

Gegeben seien zwei Vektoren \vec{u} und \vec{v} .

Dann heiße eine Summe aus einem skalaren Vielfachen des Vektors \vec{u} und einem skalaren Vielfachen des Vektors \vec{v} *Linearkombination der Vektoren \vec{u} und \vec{v}* .



In der Grafik sind die Skalare λ und μ offenbar positiv gewählt. In einer Übung zu diesem Paragraphen wirst du aufgefordert, dir eine Vorstellung von Linearkombinationen mit negativen Skalaren zu verschaffen.

Jetzt formulieren wir das angekündigte positive Kriterium für lineare Unabhängigkeit.

(6.4) Satz („Nullvektorkriterium für lineare Unabhängigkeit“)

Zwei Vektoren \vec{u} und \vec{v} sind genau dann linear unabhängig, wenn der Nullvektor mit ihnen nur auf die „triviale¹ Weise“ linear kombiniert, das heißt, die Vektorgleichung $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0}$ nur mit den Skalaren $\lambda = 0$ und $\mu = 0$ erfüllt werden kann.

In der obigen Grafik sind die Vektoren \vec{u} und \vec{v} als „linear unabhängig“ dargestellt worden. Wir können uns das Nullvektorkriterium verdeutlichen, indem wir bezogen auf diese Grafik versuchen, die Skalare λ und μ gedanklich so zu wählen, dass der resultierende Vektor $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ zum Nullvektor wird. Offenbar ist das nur möglich, wenn λ und μ gleichzeitig null sind.

Beweis des „Nullvektorkriteriums“:

„ \Rightarrow “:

Wir beweisen die „Kontraposition²“: Wenn der Nullvektor nicht nur auf triviale Weise mit den Vektoren \vec{u} und \vec{v} linear kombiniert werden kann, dann sind die Vektoren linear abhängig.

Wir setzen deswegen o.B.d.A.³ voraus, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, sodass $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0}$ gilt.

Dann können wir die Gleichung nach \vec{u} auflösen: $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda \vec{u} = -\mu \vec{v} + \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{\mu}{\lambda} \vec{v}$

Das heißt aber, dass die Vektoren \vec{u} und \vec{v} linear abhängig sind.

„ \Leftarrow “:

Wir beweisen wieder die „Kontraposition“: Wenn die Vektoren \vec{u} und \vec{v} nicht linear unabhängig sind, dann kann der Nullvektor nicht nur auf die triviale Weise mit ihnen linear kombiniert werden.

Wir setzen also voraus, dass die Vektoren \vec{u} und \vec{v} linear abhängig sind.

Ist einer der Vektoren, beispielsweise \vec{u} der Nullvektor, dann wird der Nullvektor wie folgt auf nicht triviale Weise linear kombiniert: $1 \vec{u} + 0 \vec{v} = \vec{0}$.

Ist keiner der beiden Vektoren der Nullvektor, gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ gilt. Dann wird der Nullvektor wie folgt nicht trivial linear kombiniert: $\vec{u} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} - \lambda \vec{v} = \vec{0}$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir endlich die Lagebeziehungen für zwei Geraden definieren. Dabei gehen wir davon aus, dass „identisch sein“ und „sich in genau einem Punkt schneiden“ mengentheoretisch eindeutig definierte Beziehungen sind, die keiner weiteren Erläuterung bedürfen.

Lassen wir einen Moment lang unserer Phantasie auf spielerische Weise freien Lauf und wählen wir im Raum zwei beliebige, aber voneinander verschiedene Stützpunkte und zwei beliebige vom Nullvektor verschiedene Richtungsvektoren. Dann leuchtet uns sofort ein, dass es ein höchst unwahrscheinlicher Zufall wäre, wenn sich die beiden

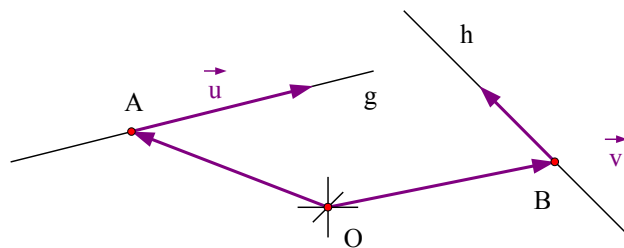
¹ „Trivial“ bedeutet „simpel“, „einfach“, „selbstverständlich“.

² siehe §B: Elemente und Prinzipien der mathematischen Theorie

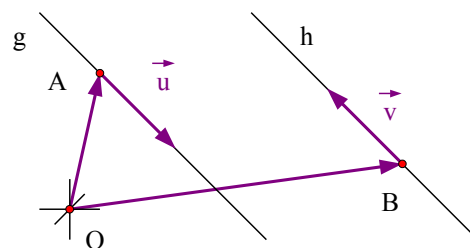
³ siehe ebenda



(„dünnen“ ;-)) Geraden, die von den beiden Stützpunkten aus mit Hilfe der beiden Richtungsvektoren in den Raum „geschossen“ werden, „irgendwo trafen“, das heißt, einen gemeinsamen Punkt besäßen. Noch weniger wahrscheinlich erscheint uns der Fall, dass sie sogar zwei verschiedene gemeinsame Punkte besäßen, was ja gemäß Identitätssatz (5.8) bereits zur Folge hätte, dass sie identisch wären und deshalb nur aus gemeinsamen Punkten bestünden.



Wahrscheinlich erscheint uns vielmehr, dass die beiden Geraden „irgendwie aneinander vorbeilaufen“, das heißt, ihre Schnittmenge leer ist. Auf diesen Fall waren wir bereits im Nachgang zum Identitätskriterium für Geraden (5.9) gestoßen. Zwei Geraden erkannten wir als garantiert disjunkt, wenn sie linear abhängige Richtungsvektoren besitzen und der Stützpunkt einer der beiden Geraden nicht zur anderen Geraden gehört. Offensichtlich ist in dieser Situation gegeben, was wir uns unter „parallel“ vorstellen: Gleiche Richtung, aber kein gemeinsamer Punkt!



Selbstverständlich ist die im Nachgang zum Identitätskriterium gewonnene Implikation (5.12) nicht umkehrbar. Wenn zwei Geraden disjunkt sind, müssen sie nicht zwangsläufig linear abhängige Richtungsvektoren besitzen. Diese Einsicht wurde uns schon zu Beginn dieses Paragraphen durch die Betrachtung des Quaders nahe gelegt.

Würden wir mit einem Zufallsgenerator zwei Punkttrichtungsgleichungen erzeugen, könnten wir nahezu sicher sein, dass die zugehörigen Geraden keinen gemeinsamen Punkt und linear unabhängige Richtungsvektoren besäßen. Das ist quasi der Normalfall: Verschiedene Richtungen und kein gemeinsamer Punkt.

(6.5) Definition

Gegeben seien zwei Geraden $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ und $h : \vec{X} = \vec{B} + \mu \vec{v}$ mit leerer Schnittmenge, das heißt, es gelte $g \cap h = \emptyset$.

g und h heißen *parallel* (Kurzschreibweise: $g \parallel h$), wenn die Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} linear abhängig sind; andernfalls heißen g und h *windschief*.

Unserer Anschauung sagt uns, dass es außer den vier nun definierten Lagebeziehungen von Geraden keine weitere fünfte gibt. Dass dieser Sachverhalt für den Modellraum richtig ist, wird jetzt geprüft:

(6.6) Satz

Sind die Geraden g und h weder parallel, noch windschief, noch identisch, so schneiden sie sich in genau einem Punkt S .

Beweis:

Sind g und h weder parallel noch windschief, so müssen sie gemäß Definition (6.5) wenigstens einen Punkt S gemeinsam haben.

Hätten g und h noch einen weiteren von S verschiedenen Punkt T gemeinsam, so müssten sie nach dem Identitätssatz identisch sein. Das widerspräche aber der Voraussetzung. Also ist S der einzige gemeinsame Punkt von g und h .



Dieser kurze Beweis macht in bemerkenswerter Weise deutlich, welche mathematische Tiefe bereits in dem Identitätssatz für Geraden steckt. Es hat sich gelohnt, ihn zu formulieren und zu beweisen!

(6.7) Richtungsvektormengengleichheit paralleler Geraden

Ist h eine Parallele der Geraden g , so ist jeder Richtungsvektor der Geraden g auch ein Richtungsvektor der Geraden h . In Konsequenz dessen stimmen die Richtungsvektormengen von Parallelen überein.

Beweis:

Seien $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \vec{v}$ zwei Parallelen. Dann ist der Richtungsvektor \vec{u} von g ein Vielfaches des Richtungsvektors \vec{v} von h . Es gibt also einen Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\vec{u} = \alpha \vec{v}$.

Ist nun der Vektor \vec{w} irgendein weiterer Richtungsvektor von g , so ist er gemäß Bemerkung (5.6) ein Vielfaches des Vektors \vec{u} . Also gibt es einen Skalar $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\vec{w} = \beta \vec{u}$.

Es folgt $\vec{w} = \beta \vec{u} = \beta (\alpha \vec{v}) = (\beta \alpha) \vec{v}$.

Nach Bemerkung (5.6) ist der Vektor \vec{w} auch ein Richtungsvektor von h .

Eine weitere wichtige Folgerung aus dem Identitätssatz ist das folgende Theorem, das im Modellraum einen Sachverhalt verifiziert, der im Anschauungsraum zu den axiomatischen Grundlagen zählt.

(6.8) Theorem „Eindeutigkeit der Parallelen“

Gegeben sei eine Gerade g und ein Punkt P , der nicht zu g gehört.

Dann gibt es genau eine Gerade h , die parallel zu g durch P verläuft.

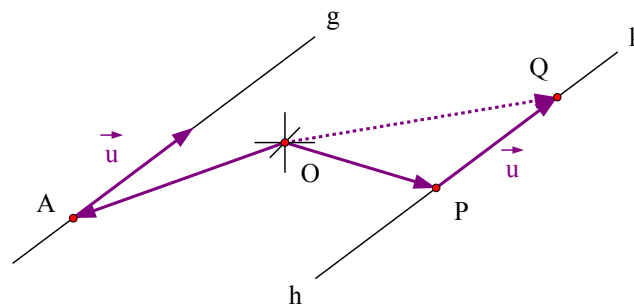
Beweis:

„zur Existenz“:

Sei \vec{u} ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor von g .

Dann ist die Gerade $h: \vec{X} = \vec{P} + \mu \vec{u}$ eine Parallele zu g . Identisch können g und h nicht sein, weil sonst der Punkt P im Widerspruch zur Voraussetzung ein Punkt von g wäre.

„zur Eindeutigkeit“:



Sei k eine weitere Gerade, die durch P parallel zu g verläuft.

Dann ist der vom Nullvektor verschiedene Richtungsvektor \vec{u} aufgrund der gegebenen Parallelität auch ein Richtungsvektor von k . Der Punkt Q mit $\vec{Q} = \vec{P} + \vec{u}$ ist dann ein weiterer gemeinsamer Punkt von h und k .

Also müssen h und k gemäß des „Identitätssatzes für Geraden“ (5.8) identisch sein.

Aufschluss darüber, wie praktisch vorzugehen ist, wenn für zwei durch Punktgleichungen gegebene Geraden g und h die zutreffende Lagebeziehung ermittelt werden soll, gibt das folgende Analyseraster.



(6.9) Analyse-Raster für die Lagebeziehung von Geraden

Die Richtungsvektoren von g und h sind linear abhängig			
wahr			falsch
Der Stützpunkt von g gehört zu h		$g \cap h = \emptyset$	
wahr	falsch	wahr	falsch
identisch	parallel	windschief	schneiden sich

Begründung des Rasters:

(1) Seien die Richtungsvektoren von g und h linear abhängig.

Unter dieser Voraussetzung können die Geraden gemäß Identitätskriterium (5.9) identisch oder gemäß Definition (6.5) parallel sein. Sie können jedoch aufgrund von Definition (6.5) nicht windschief sein, und sie können sich auch nicht in genau einem Punkt schneiden, weil sie bei Vorhandensein eines gemeinsamen Punktes gemäß Identitätskriterium (5.9) zwangsläufig identisch wären.

Gehört nun der Stützpunkt von g zu h, folgt die Identität aufgrund des Identitätskriteriums (5.9). Gehört der Stützpunkt von g nicht zu h, können die beiden Geraden gemäß Bemerkung (5.12) keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Sie sind daher parallel.

(2) Seien die Richtungsvektoren von g und h linear unabhängig.

Unter dieser Voraussetzung scheiden Identität gemäß Identitätskriterium (5.9) und Parallelität gemäß Definition (6.5) aus. Als Möglichkeiten bleiben bestehen, dass die Geraden windschief sind oder sich in genau einem Punkt schneiden. Ist die Schnittmenge $g \cap h$ leer, sind die Geraden gemäß Definition (6.5) windschief. Andernfalls kann die Schnittmenge nur genau einen Punkt enthalten, weil ein zweiter gemeinsamer Punkt sofort zur Identität führen würde.

Welche weiteren Überlegungen anzustellen sind, wenn die erste Entscheidung positiv ausfällt, wurde bereits ansatzweise in den Übungen zu §5 erörtert. Deshalb wird nun ein Beispiel diskutiert, das in die rechte Hälfte des Analyserasters fällt.

(6.10) Beispiel

Welche Lage nehmen die Geraden $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ zueinander ein?

Lösung:

Offenbar sind die Richtungsvektoren linear unabhängig⁴. Also müssen g und h windschief sein oder sich in genau einem Punkt schneiden.

Um herauszufinden, welche dieser beiden Möglichkeiten zutrifft, untersuchen wir ob g und h einen gemeinsamen Punkt X besitzen. Das ist genau dann der Fall, wenn es Parameterwerte λ und μ gibt, sodass für den

Ortsvektor \vec{X} sowohl $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ als auch gleichzeitig $\vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ gilt.

Das führt zu folgendem „Schnittpunkt-Berechnungsansatz“:

⁴ Wir vereinbaren, dass wir die Prüfung der linearen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit **zweier** Vektoren, so wie hier geschehen, in der Regel **nicht schriftlich** ausführen, sondern nur das Ergebnis konstatieren, das sich durch einfache Kopfrechnung ergibt.



$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist also das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} (1) \quad 3\lambda - 4\mu = -6 \\ (2) \quad \lambda + 2\mu = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2\lambda + 4\mu = 16 \\ [(3) \quad -4\lambda + \mu = -5] \end{array}$$

Das System ist überdeterminiert, da mehr Gleichungen als Variable auftreten.

Bei der Bestimmung der Variablen λ und μ schließen wir deshalb die Gleichung (3) zunächst aus.

$$\begin{array}{l} (1) + (2) \quad 5\lambda = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \quad (4) \\ (4) \rightarrow (2) \quad 2 + 2\mu = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \quad (5) \end{array}$$

Die errechneten Werte stellen nur dann eine Lösung dar, wenn sie auch die dritte Gleichung erfüllen:

$$(4),(5) \rightarrow (3) \quad -4 \cdot 2 + 3 = -5 \quad [\text{wahr}]$$

Damit ist die Existenz eines Lösungspaares $(\lambda; \mu)$ gewährleistet. g und h besitzen also einen Schnittpunkt S , der mit Hilfe der Gleichungen berechnet werden kann:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Geraden g und h schneiden sich also im Punkt $S = (8; -3; -1)$.

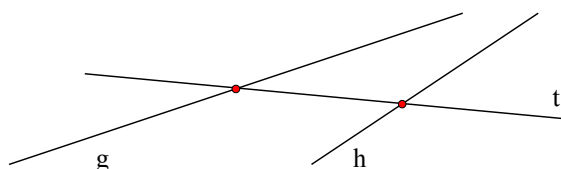
Hätten die aus den Gleichungen (1) und (2) errechneten Parameterwerte λ und μ die Gleichung (3) nicht erfüllt, wären g und h windschief.

Wir schließen diesen Paragraphen mit Sätzen über „Transversalen“. Diese Sätze versichern uns, dass sich die mit Hilfe von Vektoren im Modellraum gebildeten Geraden genauso verhalten, wie wir es anschaulich erwarten.

Warnung: Der folgende Abschnitt ist gedanklich fordernd!

(6.11) Definition

Gegeben sei ein Paar von Geraden g und h . Die Gerade t heißt *Transversale* von g und h , wenn sie mit beiden Geraden jeweils einen gemeinsamen Punkt hat.



Wir haben die Definition mit Bedacht so schwach formuliert, um den Fall identischer Geraden nicht von vornherein auszuschließen. Allerdings ist dieser Fall mathematisch uninteressant.

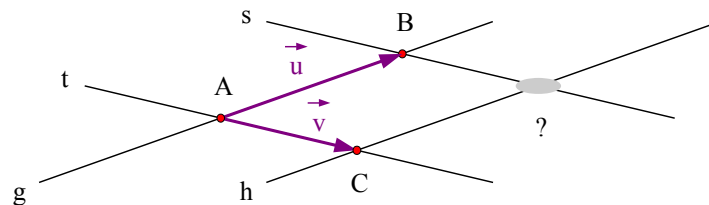
Außerdem lassen wir es im Fall zweier sich schneidender Geraden zu, dass eine Transversale durch ihren Schnittpunkt verlaufen kann. Solcherlei Transversalen gibt es offenbar unendlich viele, weil sie nur durch einen Punkt fixiert sind. Auch dieser Fall ist uninteressant.



(6.12) Sätze über Transversalen von Parallelen

Seien g und h zwei Parallelen und t eine Transversale von g und h .

- (1) Ist s eine Parallele von t , die g in einem Punkt schneidet, so ist s ebenfalls eine Transversale von g und h , das heißt, die Gerade s schneidet auch die Gerade h in einem Punkt.
- (2) Ist s eine Parallele von t , die windschief zu g verläuft, so verläuft sie auch windschief zu h .



Beweis zu (1):

Sei A der Schnittpunkt von t mit g , B der Schnittpunkt von s mit g und C der Schnittpunkt von t mit h . Aufgrund der vorausgesetzten Parallelität von g und h einerseits und s und t andererseits sind die Punkte A , B und C paarweise verschieden.

$\vec{u} := \vec{AB}$ ist demnach ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor von g und (wegen der Parallelität von g und h) auch ein Richtungsvektor von h .

$\vec{v} := \vec{AC}$ ist ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor von t und (wegen der Parallelität von t und s) auch ein Richtungsvektor von s .

Die Vektoren \vec{u} und \vec{v} müssen linear unabhängig sein, weil andernfalls nach dem Richtungskriterium für Geradenpunkte (siehe Lemma (5.4)) der Punkt C im Widerspruch zur Parallelität von g und h nicht nur ein Punkt von h , sondern auch ein Punkt von g wäre.

Wir können die vier Geraden wie folgt vektoriell beschreiben:

$$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} \quad h: \vec{X} = \vec{C} + \mu \vec{u} \quad t: \vec{X} = \vec{A} + \rho \vec{v} \quad s: \vec{X} = \vec{B} + \sigma \vec{v}$$

Nun prüfen wir, ob sich die Geraden s und h schneiden:

$$\begin{aligned} \vec{B} + \sigma \vec{v} = \vec{C} + \mu \vec{u} &\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{BC} - \sigma \vec{v} + \mu \vec{u} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{BA} + \vec{AC} - \sigma \vec{v} + \mu \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \vec{0} = -\vec{u} + \vec{v} - \sigma \vec{v} + \mu \vec{u} \Leftrightarrow \vec{0} = (-1 + \mu) \vec{u} + (1 - \sigma) \vec{v} \end{aligned}$$

Nach dem Nullvektorkriterium für linear unabhängige Vektoren folgt aus der letzten Vektorgleichung

$$-1 + \mu = 0 \quad \text{und} \quad 1 - \sigma = 0$$

Das bedeutet $\mu = 1$ und $\sigma = 1$. [Das Ergebnis war anschaulich vorauszusehen!]

Wir überprüfen, ob die berechneten Parameter einen Schnittpunkt liefern:

Der Parameterwert $\mu = 1$ liefert den Punkt D auf h mit dem Ortsvektor $\vec{D} = \vec{C} + 1 \vec{u} = \vec{C} + \vec{AB} = -\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

Der Parameterwert $\sigma = 1$ liefert den Punkt E auf s mit dem Ortsvektor $\vec{E} = \vec{B} + 1 \vec{v} = \vec{B} + \vec{AC} = -\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

Die Punkte D und E stimmen überein. Also haben die Geraden h und s den gemeinsamen Punkt $D = E$.

Beweis zu (2):

Da die Parallele s von t windschief zur Geraden g sein soll, hat sie mit der Geraden g keinen gemeinsamen Punkt.

Hätte s einen gemeinsamen Punkt mit h , würde aus der vorangehend bewiesenen Aussage (1) folgen, dass s auch einen gemeinsamen Punkt mit g haben müsste. Da diese Möglichkeit ausgeschlossen ist, gilt $s \cap h = \emptyset$.

Sei nun \vec{u} ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor von g und \vec{v} ein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor von t . Die beiden Richtungsvektoren müssen linear unabhängig sein, da g und t windschief sind.

Aufgrund der gegebenen Parallelitäten ist \vec{u} auch ein Richtungsvektor von h und \vec{v} auch ein Richtungsvektor von s . Die Geraden h und s haben also auch linear unabhängige Richtungsvektoren.

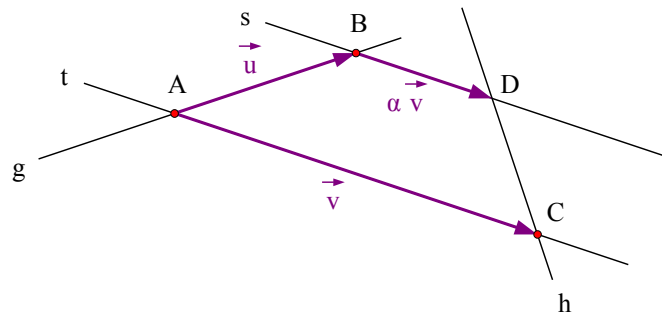
Nach dem Analyse-Raster (6.9) sind die Geraden h und s windschief.



(6.13) Sätze über Transversalen von windschiefen Geraden

Seien g und h zwei windschiefe Geraden und t eine Transversale von g und h .

- (1) Ist s eine Parallele von t , die die Gerade g in einem Punkt schneidet, so kann s nicht auch noch die Gerade h schneiden.
- (2) Ist die Gerade s eine von t verschiedene Transversale von g und h , so ist s nicht parallel zu t .



Beweis zu (1):

Sei A der Schnittpunkt von t mit g , B der Schnittpunkt von s mit g und C der Schnittpunkt von t mit h .

Aufgrund der gegebenen Voraussetzungen sind die Punkte A , B und C paarweise verschieden.

Angenommen, s schneidet (im Gegensatz zur Behauptung!) auch die Gerade h in einem Punkt D . Wir werden zeigen, dass aus dieser Annahme ein Widerspruch zur Voraussetzung folgt. Falls das gelingt, muss die Annahme falsch und die Behauptung der Aussage (1) richtig sein.

Mit der Bezeichnung $\vec{u} := \vec{AB}$ ist $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ eine Punktgleichung von g .

Der Vektor $\vec{v} := \vec{AC}$ ist ein Richtungsvektor von t . Der Vektor \vec{BD} ist ein Richtungsvektor von s . Weil s parallel zu t ist, muss \vec{BD} ein Vielfaches von \vec{v} sein. Es gibt also einen Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\vec{BD} = \alpha \vec{v}$.

Dann können wir schreiben $\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AB} + \vec{BD} = -\vec{v} + \vec{u} + \alpha \vec{v}$.

Aus dieser Darstellung ergibt sich, dass h die Punktgleichung $\vec{X} = \vec{C} + \mu (\vec{u} + (\alpha - 1) \vec{v})$ besitzt.

Wir untersuchen die Geraden g und h auf gemeinsame Punkte:

$$\begin{aligned} \vec{A} + \lambda \vec{u} &= \vec{C} + \mu (\vec{u} + (\alpha - 1) \vec{v}) && \Leftrightarrow \vec{0} = -\vec{A} + \vec{C} - \lambda \vec{u} + \mu (\vec{u} + (\alpha - 1) \vec{v}) \\ \Leftrightarrow \vec{0} &= \vec{AC} - \lambda \vec{u} + \mu \vec{u} - \mu \vec{v} + \alpha \mu \vec{v} && \Leftrightarrow \vec{0} = (\mu - \lambda) \vec{u} + (1 - \mu + \alpha \mu) \vec{v} \end{aligned}$$

Die Vektoren \vec{u} und \vec{v} sind linear unabhängig; andernfalls wäre der Punkt C von h auch ein Punkt von g im Widerspruch dazu, dass g und h als windschief vorausgesetzt sind.

Aus der linearen Unabhängigkeit folgt mit dem Nullvektorkriterium, dass die letzte der vorangehenden Vektorgleichungen genau dann erfüllt ist, wenn $\mu - \lambda = 0$ und $1 - \mu + \alpha \mu = 0$ gilt.

Also erhalten wir $\lambda = \mu$ und $1 = (1 - \alpha)\mu$. Aus der zweiten Gleichung folgt $\mu = \frac{1}{1 - \alpha}$, falls $\alpha \neq 1$.

Das war der heuristische Teil der Untersuchung. Sein Ergebnis veranlasst uns zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: $\alpha \neq 1$

Mit dem Parameterwert $\lambda = \mu = \frac{1}{1 - \alpha}$ liefert die Punktgleichung von g den Ortsvektor

$$\vec{X} = \vec{A} + \frac{1}{1 - \alpha} \vec{u}$$

Mit dem Parameterwert $\mu = \frac{1}{1 - \alpha}$ liefert die Punktgleichung von h den Ortsvektor



$$\begin{aligned}\vec{X} &= \vec{C} + \frac{1}{1-\alpha} (-\vec{v} + \vec{u} + \alpha \vec{v}) = (\vec{A} + \vec{v}) + \frac{1}{1-\alpha} (\vec{u} + (\alpha-1) \vec{v}) \\ &= \vec{A} + \frac{1}{1-\alpha} \vec{u} + \vec{v} + \frac{\alpha-1}{1-\alpha} \vec{v} = \vec{A} + \frac{1}{1-\alpha} \vec{u}\end{aligned}$$

Im Fall $\alpha \neq 1$ folgt also aus der Annahme „s schneidet die Gerade h“, dass sich auch die Geraden g und h schneiden müssten.

Fall 2: $\alpha = 1$

Ist $\alpha = 1$, so folgt aus der Annahme „s schneidet die Gerade h“ $\vec{CD} = -\vec{v} + \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} = \vec{u}$ und damit $g \parallel h$.

In beiden Fällen folgt aus der Annahme „s schneidet die Gerade h“ ein Widerspruch zur Voraussetzung, nach der g und h windschief sein müssen. Die Annahme ist deswegen falsch und damit die Behauptung der Aussage (1) richtig.

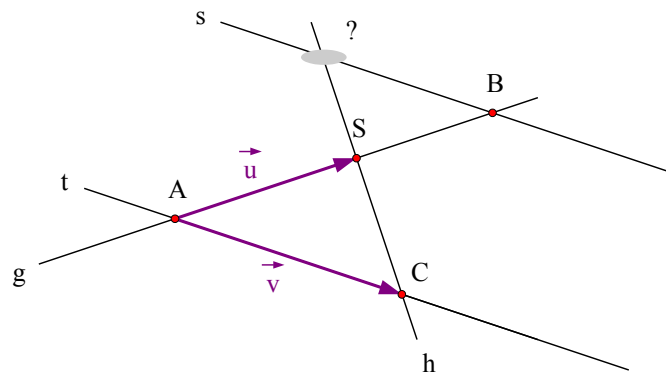
Beweis zu (2):

Die Aussage (2) ist die logische Kontraposition der Aussage (1). Da die Aussage (1) bewiesen wurde, gilt auch die Aussage (2)!

(6.14) Sätze über Transversalen von sich schneidenden Geraden

Seien g und h zwei Geraden, die sich in genau einem Punkt S schneiden, und t eine Transversale von g und h, die nicht durch ihren Schnittpunkt S verläuft.

- (1) Ist s eine Parallele von t, die g in einem Punkt schneidet, so ist s ebenfalls eine Transversale von g und h, das heißt, die Gerade s schneidet auch die Gerade h in genau einem Punkt.
- (2) Ist s eine Parallele von t, die windschief zu g verläuft, so verläuft sie auch windschief zu h.



Die Beweise werden dem Leser zur Übung überlassen ;-)